# Corrections

**Exercice 1 :** [énoncé]
Les $X_n(\Omega)$ sont des ensembles au plus dénombrables et

$$Y(\Omega) \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n(\Omega).$$

On en déduit que l'ensemble $Y(\Omega)$ est au plus dénombrable.
De plus, pour tout $y \in Y(\Omega)$

$$Y^{-1}(\{y\}) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left\{\omega \in \Omega \,\middle|\, N(\omega) = n \text{ et } X_n(\omega) = y\right\}$$

et donc

$$Y^{-1}(\{y\}) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left\{N(\omega) = n\right\} \cap \left\{X_n(\omega) = y\right\}$$

est bien élément de la tribu $\mathcal{T}$.

**Exercice 2 :** [énoncé]

(a) $\theta_n$ est une probabilité donc $\theta_n \in [0\,;1]$.
Si $\theta_n = 1$ alors $\mathrm{P}(T = n) = \mathrm{P}(T \geq n)$ et donc $\mathrm{P}(T > n) = 0$ ce qu'exclut les hypothèses.

(b) On a $\mathrm{P}(T = n) = \theta_n \mathrm{P}(T \geq n)$ et $\mathrm{P}(T = n) + \mathrm{P}(T \geq n+1) = \mathrm{P}(T \geq n)$ donc

$$\mathrm{P}(T \geq n+1) = (1-\theta_n)\mathrm{P}(T \geq n).$$

Sachant $\mathrm{P}(T \geq 0) = 1$, on obtient

$$\mathrm{P}(T \geq n) = \prod_{k=0}^{n-1} (1-\theta_k).$$

Puisque $\mathrm{P}(T \geq n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, on a

$$\sum_{k=0}^{n-1} \ln(1-\theta_k) = \ln\left(\prod_{k=0}^{n-1} (1-\theta_k)\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty.$$

Ainsi, il y a divergence de la série $\sum \ln(1-\theta_n)$.
Si la suite $(\theta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0, la série $\sum \theta_n$ est évidemment divergente.
Si la suite $(\theta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0 alors $\ln(1-\theta_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\theta_n$ et, par équivalence de séries à termes de signe constant, la série $\sum \theta_n$ diverge.

(c) Analyse : Si $T$ est une variable aléatoire solution alors

$$\mathrm{P}(T = n) = \mathrm{P}(T \geq n) - \mathrm{P}(T \geq n+1) = \theta_n \prod_{k=0}^{n-1} (1-\theta_k)$$

ce qui détermine entièrement la loi de $T$.
Synthèse : Posons

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \theta_n \prod_{k=0}^{n-1} (1-\theta_k).$$

On a

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 0.$$

Vérifions aussi $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de somme égale à 1.
Introduisons $P_n = \prod_{k=0}^{n-1} (1-\theta_k)$. On a

$$\ln P_n = \sum_{k=0}^{n-1} \ln(1-\theta_k) \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty.$$

En effet, la série des $\ln(1-\theta_k)$ est divergente à terme négatifs et ce que la suite $(\theta_n)$ tend vers 0 ou non).
On a aussi $P_0 = 1$ et $P_n - P_{n+1} = u_n$, donc

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = P_0 - P_{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1.$$

On peut alors définir une variable aléatoire $T$ dont la loi vérifie

$$\mathrm{P}(T = n) = u_n = \theta_n \prod_{k=0}^{n-1} (1-\theta_k).$$

On a alors

$$\mathrm{P}(T \geq n) = \sum_{k=n}^{+\infty} u_k = P_n = \prod_{k=0}^{n-1} (1-\theta_k) > 0$$

et

$$\mathrm{P}(T = n \,|\, T \geq n) = \theta_n.$$

La variable aléatoire $T$ est bien solution.

**Exercice 3 :** [énoncé]

(a) Posons $M = \max(-a, b)$. On a $|X| \leq M$ et la constante $M$ admet une espérance. On en déduit que $X$ admet une espérance. De plus

$$m = \mathrm{E}(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} xP(X = x) \geq \sum_{x \in X(\Omega)} aP(X = x) = a$$

et de même $m \leq b$.

(b) Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\left(\sum_{y \geq 0} yP(Y = y)\right)^2 \leq \sum_{y \geq 0} y^2 \mathrm{P}(Y = y) \sum_{y \geq 0} \mathrm{P}(Y = y) = su.$$

(c) De façon immédiate $\mathrm{E}(Y) = 0$ et $\mathrm{V}(Y) = \sigma^2$. On en déduit

$$t = -\sum_{y<0} yP(Y = y) \text{ et } \sum_{y<0} y^2 \mathrm{P}(Y = y) = \sigma^2 - s.$$

En appliquant à nouveau l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$t^2 \leq (\sigma^2 - s)(1 - u).$$

(d) Ce qui précède fournit

$$t^2 \leq \min\{su, (\sigma^2 - s)(1 - u)\}$$

pour $u \in [0\,;1]$ et $s \in [0\,;\sigma^2]$. Sachant

$$su \leq (\sigma^2 - s)(1 - u) \iff s + \sigma^2 u \leq \sigma^2.$$

Si $s + \sigma^2 u \leq \sigma^2$ alors

$$\min\{su, (\sigma^2 - s)(1 - u)\} = su \leq \sigma^2(1 - u)u \leq \sigma^2/4.$$

Si $s + \sigma^2 u > \sigma^2$, c'est analogue et la conclusion demeure.

(e) On a

$$\sigma^2 = \mathrm{E}(Y^2) = \sum_{y \geq 0} y^2 \mathrm{P}(Y = y) + \sum_{y<0} y^2 \mathrm{P}(Y = y).$$

Puisque $Y$ est à valeurs dans $[a - m\,; b - m]$, on a

$$\sum_{y \geq 0} y^2 \mathrm{P}(Y = y) \leq \sum_{y \geq 0} (b - m) yP(Y = y) = (b - m)t$$

et

$$\sum_{y<0} y^2 \mathrm{P}(Y = y) \leq \sum_{y<0} (a - m) yP(Y = y) = -(a - m)t.$$

On en déduit

$$\sigma^2 \leq (b - a)t.$$

En élevant au carré

$$\sigma^4 \leq (b - a)^2 t^2 = \frac{(b - a)^2}{4} \sigma^2.$$

Enfin, que $\sigma$ soit nul ou non, on obtient

$$\sigma^2 \leq \frac{(b - a)^2}{4}.$$

Notons que cette inégalité est une égalité lorsque $X$ suit une loi de Bernoulli de paramètre $p = 1/2$.

**Exercice 4 :** [énoncé]

(a) Raisonnons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$.
Cas $n = 1$. Si $X$ suit une loi binomiale négative de paramètres 1 et $p$ alors

$$\mathrm{P}(X = k) = \binom{k - 1}{0} p(1 - p)^{k-1}.$$

On reconnaît une loi géométrique de paramètre $p$.
Supposons la propriété vraie au rang $n \geq 1$.
L'évènement $X_1 + \cdots + X_{n+1} = k$ peut se décomposer en la réunion des évènements incompatibles suivants

$$X_1 + \cdots + X_n = \ell \text{ et } X_{n+1} = k - \ell \text{ pour } \ell \in [\![n\,; k - 1]\!].$$

On en déduit par indépendance

$$\begin{pmatrix} \mathrm{P}(X_1 + \cdots + X_{n+1} = k) = \sum_{\ell=n}^{k-1} \ell - 1 \\ n - 1 p^n (1 - p)^{\ell - n} p (1 - p)^{k - \ell - 1} \end{pmatrix}$$

puis

$$\begin{pmatrix} \mathrm{P}(X_1 + \cdots + X_{n+1} = k) = p^{n+1} (1 - p)^{k-(n+1)} \sum_{\ell=n}^{k-1} \ell - 1 \\ n - 1. \end{pmatrix}$$

Or par la formule du triangle de Pascal

$$\begin{pmatrix} \sum_{\ell=n}^{k-1} \ell - 1 \\ n - 1 = \binom{k-1}{n} \end{pmatrix}$$

et donc

$$\mathrm{P}(X_1+\cdots+X_{n+1}=k)=\binom{k-1}{n}p^{n+1}(1-p)^{k-(n+1)}.$$

Récurrence établie.

(b) Par linéarité de l'espérance

$$\mathrm{E}(X)=\frac{n}{p}.$$

Par indépendance des variables sommées

$$\mathrm{V}(X)=n\frac{1-p}{p^2}.$$

**Exercice 5 :** [énoncé]

(a) Notons $A_n$ l'évènement « le jeu dure au moins $n$ parties ». $A_{n+1}$ est la conjonction des évènements indépendants $A_n$ et le rouge sort au $n+1$- ième tirage ». On en déduit

$$\mathrm{P}(A_{n+1})=\frac{1}{2}\mathrm{P}(A_n).$$

Par continuité décroissante, on obtient

$$\mathrm{P}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*}A_n\right)=\lim_{n\to+\infty}\mathrm{P}(A_n)=0.$$

L'arrêt du jeu est donc presque sûr.
Lorsque la partie s'arrête à la $n$-ième tentative, le joueur a perdu $1+2+\cdots+2^{n-1}$ brouzoufs et vient de gagner $2^n$ brouzoufs. Au total, il gagne 1 brouzouf. Son gain étant presque sûrement constant égal à 1 brouzoufs, son espérance de gain vaut 1 brouzouf.

(b) Avec ce nouveau protocole, lorsque la partie s'arrête à la $n$-ième tentative, le gain du joueur vaut

$$2.3^{n-1}-(1+3+\cdots+3^{n-1})=\frac{3^{n-1}+1}{2}.$$

L'espérance de gain est

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{3^{n-1}+1}{2}\mathrm{P}(A_n)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{3^{n-1}+1}{2^{n+1}}=+\infty.$$

(c) Puisque le joueur ne peut disputer que $n$ parties, son espérance de gain devient

$$\sum_{k=1}^{n}1\times\mathrm{P}(A_n)-(2^n-1)\mathrm{P}\left(\bigcup_{k=n+1}^{+\infty}A_k\right)=1-\frac{1}{2^n}-(2^n-1)\times\frac{1}{2^n}=0.$$

**Exercice 6 :** [énoncé]

(a) Il est entendu que la variable $S_n$ prend ses valeurs dans $[\![0\,;N]\!]$.
Par récurrence sur $n\geq 1$, montrons que $S_n$ suit une binomiale de paramètres $N$ et $p_n$ (avec $p_n$ à déterminer).
Pour $n=1$, $S_1=X_1$ suit, compte tenu de la modélisation, une loi binomiale de paramètres $N$ et $1/6$.
Supposons que $S_n$ suit une loi binomiale de paramètres $N$ et $p_n$.
Lors du$(n+1)$-ième lancer, le joueur dispose de $N-M$ dés avec $M=S_n$
$X_{n+1}$ suit alors une loi binomiale de paramètres $N-M$ et $1/6$ (avec $N-M$ qui peut être nul auquel cas $X_{n+1}$ est une variable constante égale à 0). On a donc

$$\forall k\in[\![0\,;N-M]\!],\mathrm{P}(X_{n+1}=k\,|\,S_n=M)=\binom{N-M}{k}\left(\frac{1}{6}\right)^k\left(\frac{5}{6}\right)^{N-M-k}.$$

On a alors, pour $m\in[\![0\,;N]\!]$

$$\mathrm{P}(S_{n+1}=k)=\sum_{M=0}^{k}\mathrm{P}(S_n=M)\mathrm{P}(X_{n+1}=k-M\,|\,S_n=M).$$

Ceci donne

$$\mathrm{P}(S_{n+1}=k)=\sum_{M=0}^{k}\binom{N}{M}p_n^M(1-p_n)^{N-M}\binom{N-M}{k-M}\left(\frac{1}{6}\right)^{k-M}\left(\frac{5}{6}\right)^{N-k}.$$

Or

$$\binom{N}{M}\binom{N-M}{k-M}=\frac{N!}{M!(k-M)!(N-k)!}=\binom{N}{k}\binom{k}{M}$$

et donc

$$\mathrm{P}(S_{n+1}=k)=\binom{N}{k}(1-p_n)^N\left(\frac{5}{6}\right)^{N-k}\sum_{M=0}^{k}\binom{k}{M}\left(\frac{p_n}{1-p_n}\right)^M\left(\frac{1}{6}\right)^{k-M}$$

puis

$$\mathrm{P}(S_{n+1}=k)=\binom{N}{k}(1-p_n)^N\left(\frac{5}{6}\right)^{N-k}\left(\frac{p_n}{1-p_n}+\frac{1}{6}\right)^k.$$

On peut réorganiser

$$\mathrm{P}(S_{n+1}=k)=\binom{N}{k}\left(\frac{1+5p_n}{6}\right)^k\left(1-\frac{1+5p_n}{6}\right)^{N-k}.$$

Ainsi, $S_{n+1}$ suit une loi binomiale de paramètres $N$ et $p_{n+1}=\frac{1+5p_n}{6}$.
Récurrence établie.
On peut préciser la probabilité $p_n$ sachant

$$p_1=\frac{1}{6} \text{ et } p_{n+1}=\frac{1+5p_n}{6}.$$

La résolution de cette relation de récurrence donne

$$p_n=1-\left(\frac{5}{6}\right)^n.$$

(b) Connaissant la loi de $S_n$, on peut déterminer directement la probabilité de l'événement $(S_n=N)$

$$\mathrm{P}(S_n=N)=\binom{N}{N}p_n^N(1-p_n)^0=\left(1-\left(\frac{5}{6}\right)^n\right)^N\xrightarrow[n\to+\infty]{}1.$$

L'événement

$$A= \text{« il existe } n \text{ tel que } S_n=N \text{ »}$$

est la réunion croissante des événements $(S_n=N)$. Par continuité croissante

$$\mathrm{P}(A)=\lim_{n\to+\infty}\mathrm{P}(S_n=N)=1.$$

(c) Pour déterminer la loi de $T$, on va calculer la probabilité de l'événement $(T\leq n)$. Ce dernier correspond à l'événement $(S_n=N)$ et donc

$$\mathrm{P}(T\leq n)=\left(1-\left(\frac{5}{6}\right)^n\right)^N \text{ avec } n\in\mathbb{N}.$$

On a alors

$$\mathrm{P}(T=n)=\mathrm{P}(T\leq n)-\mathrm{P}(T\leq n-1)$$

et donc

$$\mathrm{P}(T=n)=\left(1-\left(\frac{5}{6}\right)^n\right)^N-\left(1-\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}\right)^N.$$

En fait, la loi de $T$ peut être comprise comme le max de $N$ lois géométriques indépendantes.

(d) Pour calculer l'espérance de $T$, on exploite la formule

$$\mathrm{E}(T)=\sum_{n=0}^{+\infty}\mathrm{P}(T>n) \text{ avec } \mathrm{P}(T>n)=1-\mathrm{P}(T\leq n).$$

En exploitant la factorisation

$$1-a^N=(1-a)(1+a+\cdots+a^{N-1})$$

on obtient

$$\mathrm{P}(T>n)=1-\left(1-\left(\frac{5}{6}\right)^n\right)^N=\sum_{k=1}^N\binom{N}{k}(-1)^{k-1}\left(\frac{5}{6}\right)^{nk}.$$

Par sommation géométrique

$$\mathrm{E}(T)=\sum_{k=1}^N\binom{N}{k}\frac{(-1)^{k-1}6^k}{6^k-5^k}.$$

Numériquement
Pour $N=1$, $\mathrm{E}(T)=6$ (on reconnaît l'espérance d'une loi géométrique)
Pour $N=2$, $\mathrm{E}(T)=96/11\simeq 8{,}7$.
On peut même poursuivre un tableau de valeurs
$N=3$, $\mathrm{E}(T)=10{,}5$
$N=4$, $\mathrm{E}(T)=11{,}9$
$N=5$, $\mathrm{E}(T)=13{,}0$
et les valeurs de l'espérance qui suivent sont $13{,}9, 14{,}7, 15{,}4,\dots$

**Exercice 7 :** [énoncé]
Pour $i\geq 2$, on introduit l'événement

$$A_i=\text{« La } i\text{-ème boule tirée est identique à la précédente »}$$

Compte tenu de la composition de l'urne, on peut affirmer

$$\mathrm{P}(A_i)=1/N.$$

Compte tenu de l'expérience modélisée (tirage avec remise), les événements $A_i$ sont mutuellement indépendants.
(a) L'événement $(T=k)$ correspond à $A_2\cap\ldots\cap A_k$ et donc

$$\mathrm{P}(T=k)=\frac{1}{N^{k-1}}.$$

L'événement $(T = k+1)$ correspond à $\overline{A_2} \cap A_3 \cap \ldots \cap A_{k+1}$ et donc

$$\mathrm{P}(T = k+1) = \frac{N-1}{N} \times \frac{1}{N^{k-1}} = \frac{N-1}{N^k}.$$

(b) L'événement $(T = n+k)$ correspond à $\overline{(T \leq n)} \cap \overline{A_{n+1}} \cap A_{n+2} \cap \ldots \cap A_{n+k}$ et donc

$$\mathrm{P}(T = n+k) = \mathrm{P}(T > n) \times \frac{N-1}{N^k}.$$

(c) Sous réserve de convergence, l'espérance de $T$ peut s'écrire

$$\mathrm{E}(T) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{P}(T > n).$$

Ici

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{P}(T > n) = \mathrm{P}(T > 0) + \frac{N^k}{N-1} \sum_{n=1}^{+\infty} \mathrm{P}(T = n+k).$$

Ce qui assure l'existence de l'espérance. De plus, puisque le processus s'arrête presque sûrement et que la variable$T$ prend ses valeurs dans $\{k, k+1, \ldots\}$, on a

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \mathrm{P}(T = n+k) = \sum_{n=k}^{+\infty} \mathrm{P}(T = n) - \mathrm{P}(T = k) = 1 - \frac{1}{N^{k-1}}.$$

On en déduit la valeur de l'espérance de $T$

$$\mathrm{E}(T) = \frac{N^k - 1}{N-1}.$$

Notons, même si ce n'est pas l'objet de cet exercice, qu'il est assez facile de justifier que le processus s'arrête presque sûrement. Considérons l'événement

$$B = \text{« le processus ne s'arrête pas »}$$

Pour voir que celui-ci est négligeable, on va l'inclure dans un événement (de probabilité plus immédiatement accessible) en regroupant les tirages $k$ par $k$ :

$$B \subset \bigcap_{j=0}^{+\infty} \{\text{les tirages de rangs } jk+1, jk+2, \ldots, jk+k \text{ ne sont pas tous identiques}\}.$$

Par indépendance et continuité décroissante

$$\mathrm{P}(B) \leq \lim_{J \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{N^{k-1}}\right)^J = 0.$$

**Exercice 8 :** [énoncé]

(a) Introduisons les événements

$$A_p = \{X_{2p-1} + X_{2p} \leq 1\} \text{ avec } p \geq 1.$$

Ces événements sont indépendants et

$$\mathrm{P}(A_p) = (1-p)^2 + 2p(1-p) = 1 - p^2.$$

Par continuité décroissante

$$\mathrm{P}\left(\bigcap_{p=1}^{+\infty} A_p\right) = \lim_{N \to +\infty} \mathrm{P}\left(\bigcap_{p=1}^{N} A_p\right).$$

Par indépendance

$$\mathrm{P}\left(\bigcap_{p=1}^{N} A_p\right) = \prod_{p=1}^{N} \mathrm{P}(A_p) = (1-p^2)^N.$$

Par limite d'une suite géométrique de raison $1 - p^2 \in ]0\,;1[$, on obtient

$$\mathrm{P}\left(\bigcap_{p=1}^{+\infty} A_p\right) = 0.$$

Par conséquent, l'événement $\overline{\bigcup_{p=1}^{+\infty} A_p}$ est presque sûr. Ainsi, il existe presque sûrement un rang pair en lequel il y a deux succès consécutifs. *A fortiori*, il est presque sûr qu'il existe un rang (pair ou impair) en lequel il y a deux succès consécutifs.

(b) Pour $n \geq 2$, on souhaite calculer $p_n = \mathrm{P}(T = n)$.
Pour $n = 2$, l'événement $(T = 2)$ correspond à $(X_1 = 1, X_2 = 1)$ de probabilité $p^2$.
Pour $n = 3$, l'événement $(T = 3)$ correspond à $(X_1 = 0, X_2 = 1, X_3 = 1)$ de probabilité $(1-p)p^2$.
Pour $n \geq 3$, les choses se compliquent quelque peu. Considérons le système complet d'événements

$$(X_1 = 0), (X_1 = 1, X_2 = 0), (X_1 = 1, X_2 = 1).$$

Par la formule des probabilités totales
$\mathrm{P}(T = n) = P_{X_1=0}(T = n)\mathrm{P}(X_1 = 0) + P_{X_1=1,X_2=0}(T = n)\mathrm{P}(X_1 = 1, X_2 = 0) + P_{X_1=1,X_2=1}(T = n)\mathrm{P}(X_1 = 1, X_2 = 1)$

Or
$$P_{X_1=0}(T=n)=\mathrm{P}(T=n-1).$$
En effet, la première épreuve étant un échec, obtenir deux succès consécutifs au rang $n$ revient maintenant à obtenir deux succès consécutifs au rang $n-1$.
Par un argument analogue
$$P_{X_1=1,X_2=0}(T=n)=\mathrm{P}(T=n-2).$$
Enfin
$$P_{X_1=1,X_2=1}(T=n)=0$$
car les deux succès consécutifs ont été obtenus au rang 2 et qu'ici $n\geq 3$.
Finalement, on obtient la relation de récurrence
$$\mathrm{P}(T=n)=(1-p)\mathrm{P}(T=n-1)+p(1-p)\mathrm{P}(T=n-2).$$

(c) Par calculer l'espérance de $T$, on multiplie par $n$ la relation précédente et on somme
$$\sum_{n=3}^{+\infty}nP(T=n)=(1-p)\sum_{n=3}^{+\infty}nP(T=n-1)+p(1-p)\sum_{n=3}^{+\infty}nP(T=n-2).$$
Or
$$\sum_{n=3}^{+\infty}nP(T=n-1)=\sum_{n=3}^{+\infty}(n-1+1)\mathrm{P}(T=n-1)=\sum_{n=2}^{+\infty}nP(T=n)+1$$
car $\sum_{n=2}^{+\infty}\mathrm{P}(T=n)=1$
De même
$$\sum_{n=3}^{+\infty}nP(T=n-2)=\sum_{n=2}^{+\infty}nP(T=n)+2.$$
Ainsi
$$\sum_{n=2}^{+\infty}nP(T=n)-2P(T=2)=(1-p^2)\sum_{n=2}^{+\infty}\mathrm{P}(T=n)+1+p-2p^2.$$
Finalement, $T$ admet une espérance finie et
$$E(T)=\frac{1+p}{p^2}.$$

**Exercice 9 :** [énoncé]

(a) Le jeu dure infiniment si, et seulement si, chaque lancer produit « face » ou bien chaque lancer produit « pile ». Notons $A_n$ l'évènement :

« le $n$-ième lancer donne face ».

Par indépendance des lancers
$$\mathrm{P}(A_1\cap\ldots\cap A_n)=\prod_{k=1}^{n}\mathrm{P}(A_k)=\frac{1}{2^n}.$$
Par continuité décroissante
$$\mathrm{P}\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty}A_n\right)=\lim_{n\to+\infty}\mathrm{P}(A_1\cap\ldots\cap A_n)=0.$$
De même
$$\mathrm{P}\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty}\overline{A_n}\right)=0.$$
L'évènement « le jeu ne s'arrête pas » est donc négligeable.

(b) $X$ est à valeurs dans $\mathbb{N}\setminus\{0,1\}$.
Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on a $X>n$ si les $n$ premiers lancers sont identiques. On en déduit
$$\mathrm{P}(X>n)=\mathrm{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n}A_k\cup\bigcap_{k=1}^{n}\overline{A_k}\right)=\frac{1}{2^{n-1}}.$$
On en déduit
$$\mathrm{E}(X)=\sum_{n=0}^{+\infty}\mathrm{P}(X>n)=1+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2^{n-1}}=3.$$
En fait $X-1$ suit une loi géométrique de paramètre $1/2$.

**Exercice 10 :** [énoncé]

(a) La variable aléatoire prend ses valeurs dans l'ensemble dénombrable $\mathbb{N}\cup\{+\infty\}$.
Pour $k\in\mathbb{N}$, on a $Z(\omega)=k$ lorsque $\omega$ appartient à exactement $k$ événements parmi les $E_n$. Pour $i_1<i_2<\cdots<i_k\in\mathbb{N}$, appartenir aux ensembles $E_{i_1},\ldots,E_{i_k}$ et pas aux autres s'expriment comme une intersection dénombrable d'événements $E_{i_k}$ et $\overline{E_j}$ : c'est donc un événement. En faisant

varier les $i_1,\dots,i_k$ sur l'ensemble dénombrable des possibles, $(Z=k)$ se comprend comme une réunion d'événements.
Enfin, $(Z=+\infty)$ est aussi un événement car c'est le complémentaire de la réunion dénombrable des événements $(Z=k)$ pour $k$ parcourant $\mathbb{N}$.

(b) $F$ est le complémentaire de $(Z=+\infty)$, c'est bien un événement.
$\overline{F}$ correspond à l'ensemble des $\omega$ appartenant à une infinité de $E_n$. On peut l'écrire comme l'intersection décroissante

$$\overline{F}=\cap_{N\in\mathbb{N}}\cup_{n\geq N}E_n.$$

Par continuité décroissante

$$\mathrm{P}(\overline{F})=\lim_{N\to+\infty}\mathrm{P}\big(\cup_{n\geq N}E_n\big).$$

Or

$$\mathrm{P}\big(\cup_{n\geq N}E_n\big)\leq\sum_{n\geq N}\mathrm{P}(E_n)\xrightarrow[N\to+\infty]{}0.$$

On peut conclure $\mathrm{P}(\overline{F})=0$ puis $\mathrm{P}(F)=1$.

(c) Posons $Z_N=\sum_{n=0}^N 1_{E_n}$. Commençons par établir

$$\forall k\in\mathbb{N},\ \mathrm{P}(Z_N=k)\xrightarrow[N\to+\infty]{}\mathrm{P}(Z=k).$$

Soit $\varepsilon>0$. Il existe un rang $N_0$ tel que pour tout $N\geq N_0$

$$\sum_{n\geq N+1}\mathrm{P}(E_n)\leq\varepsilon.$$

Posons $G$ l'événement réunion des $E_n$ pour $n\geq N+1$. Ce qui précède donne $\mathrm{P}(G)\leq\varepsilon$.
Or

$$(Z_N=k)\cap\overline{G}=(Z=k)\cap\overline{G}$$

et

$$P(Z_N=k)=\underbrace{\mathrm{P}(Z_N=k\cap G)}_{\leq\varepsilon}+\mathrm{P}(Z_N=k\cap\overline{G})$$
$$P(Z=k)=\underbrace{\mathrm{P}(Z=k\cap G)}_{\leq\varepsilon}+\mathrm{P}(Z=k\cap\overline{G})$$

donc

$$\big|\mathrm{P}(Z_N=k)-\mathrm{P}(Z=k)\big|\leq 2\varepsilon.$$

Ainsi, on peut affirmer

$$\forall k\in\mathbb{N},\ \mathrm{P}(Z_N=k)\xrightarrow[N\to+\infty]{}\mathrm{P}(Z=k).$$

Pour tout $M$,

$$\sum_{k=0}^{M}k\mathrm{P}(Z=k)=\lim_{N\to+\infty}\sum_{k=0}^{M}k\mathrm{P}(Z_N=k)$$

avec

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{M}k\mathrm{P}(Z_N=k)&\leq\sum_{k=0}^{+\infty}k\mathrm{P}(Z_N=k)\\&=\mathrm{E}(Z_N)\underset{\text{linéarité}}{=}\sum_{n=0}^{N}\mathrm{E}(1_{E_N})\\&=\sum_{n=0}^{N}\mathrm{P}(E_n)\leq\sum_{n=0}^{+\infty}\mathrm{P}(E_n).\end{aligned}$$

On a donc

$$\sum_{k=0}^{M}k\mathrm{P}(Z=k)\leq\sum_{n=0}^{+\infty}\mathrm{P}(E_n)=M.$$

Les sommes partielles de la série à termes positifs des $k\mathrm{P}(Z=k)$ sont bornées, cette série converge.

**Exercice 11 :** [énoncé]

(a)
```
import random as rnd

def T():
    n = 0
    P = False
    PF = False
    while (not PF):
        n = n + 1
        x = rnd.random()
        if x < 0.5:
            P = True
        elif P:
            PF = True
        else:
```

```
            P = False
    return n

def repete(n):
    c = 0
    for i in range(n):
        c = c + T()
    return c/n
```

L'étude numérique amène à conjecturer $\mathrm{E}(T) = 4$.

(b) Posons $A_\infty$ l'événement

« Le motif PF n'apparaît pas ».

L'événement $A_\infty$ est exactement la réunion des événements correspondant à une succession de F de longeur $k \in \mathbb{N}$ suivie exlcusivement de P ainsi que de l'événement correspondant uniquement à l'obtention de $F$. L'événement $A_\infty$ est alors négligeable car réunion dénombrable d'événements de probabilités nulles[2]. On en déduit que la réunion des $A_i$, avec $i \geq 2$, est un événement presque sûr.

(c) $A_n$ est la réunion des configurations commençant par un certain nombre $k \in \mathbb{N}$ de F puis se poursuivant avec des P au nombre de $\ell \in \mathbb{N}^*$ tel que $k + \ell = n - 1$ et se poursuivant enfin par un $F$. Chacune de ces configurations est de probabilité $1/2^n$ et donc $q_n = \frac{n-1}{2^n}$.

(d) La suite des $nq_n$ est sommable donc $T$ admet une espérance et

$$\mathrm{E}(T) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(n-1)n}{2^n} = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{(1-1/2)^3} = 4$$

(la somme est calculée en dérivant deux fois la série entière géométrique).

(e) On adapte le code précédent

```
def T():
    n = 0
    P = False
    PP = False
    while (not PP):
        n = n + 1
        x = rnd.random()
        if x < 0.5:
            if P:
                PP = True
            P = True
        else:
            P = False
    return n
```

On conjecture cette fois-ci une espérance égale à 6.

(f) $q_2$ est la probabilité de PP et $q_3$ celle de FPP d'où les valeurs proposées. Pour $n \geq 4$, on considère le système complet constitué des événements commençant par F, PF et PP et on obtient par argument de symétrie (quand on a obtenu F, ceci remet les « compteurs à zéro »)

$$q_n = \frac{1}{2}q_{n-1} + \frac{1}{4}q_{n-2} + \frac{1}{4} \times 0. \tag{1}$$

(g) Commençons par vérifier que les $A_n$ avec $n \geq 2$ constituent un système complet. Les événements $A_n$ sont deux à deux incompatibles et la série des $q_n$ converge. En sommant la relation (**??**) pour $n$ supérieur à 2, on obtient après glissement d'indice

$$\sum_{n=2}^{+\infty} q_n = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{2}\sum_{n=3}^{+\infty} q_n + \frac{1}{4}\sum_{n=2}^{+\infty} q_n$$

puis

$$\sum_{n=2}^{+\infty} q_n = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{+\infty} q_n + \frac{1}{4}\sum_{n=2}^{+\infty} q_n.$$

On en tire que la somme des $q_n$ est égale à 1. On peut alors calculer l'espérance de $T$.

Pour $t \in [-1\,;1]$, la fonction génératrice de $T$ en $t$ est donnée par

$$G_T(t) = \sum_{n=2}^{+\infty} q_n t^n = \frac{1}{4}t^2 + \frac{1}{8}t^3 + \frac{t}{2}\left(G_T(t) - \frac{t^2}{4}\right) + \frac{t^2}{4}G_T(t). \tag{2}$$

On peut exprimer $G_T(t)$ par une fraction rationnelle définie sur $[-1\,;1]$, celle-ci est dérivable en 1 ce qui assure que $T$ admet une espérance et, par dérivation de (**??**),

$$G_T'(t) = \frac{t}{2} + \frac{1}{2}G_T(t) + \frac{t}{2}G_T'(t) + \frac{t}{2}G_T(t) + \frac{t^2}{4}G_T'(t).$$

Pour $t = 1$, on obtient

$$\mathrm{E}(T) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{E}(T) + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\mathrm{E}(T).$$

2. Par exemple, la probabilité de n'obtenir que des F est par continuité décroissante la limite des probabilités de commencer par $n$ F à savoir $1/2^n$. Les autres calculs sont analogues et, de façon générale, la probabilité d'obtenir un tirage infini précis est nulle.

On en tire $\mathrm{E}(T) = 6$.

**Exercice 12 :** [énoncé]
On sait $\chi_M(\lambda) = \det(\lambda \mathrm{I}_n - M)$. Par la formule définissant le déterminant et la linéarité de l'espérance

$$\mathrm{E}\big(\chi_M(\lambda)\big) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) \mathrm{E}\left(\prod_{i=1}^{n} (\lambda \delta_{\sigma(i),i} - m_{\sigma(i),i})\right).$$

Par indépendance des variables, on a pour tout $\sigma \in \mathcal{S}_n$,

$$\mathrm{E}\left(\prod_{i=1}^{n} (\lambda \delta_{\sigma(i),i} - m_{\sigma(i),i})\right) = \prod_{i=1}^{n} \mathrm{E}(\lambda \delta_{\sigma(i),i} - m_{\sigma(i),i}) = \prod_{i=1}^{n} (\lambda \delta_{\sigma(i),i} - \mu).$$

On en déduit

$$\mathrm{E}\big(\chi_M(\lambda)\big) = \chi_A(\lambda)$$

avec $A$ la matrice dont tous les coefficients sont égaux à $\mu$. La poursuite des calculs donne

$$\mathrm{E}\big(\chi_M(\lambda)\big) = (\lambda + n\mu)\lambda^{n-1}.$$

**Exercice 13 :** [énoncé]
On a

$$\mathrm{E}\Big(\big(Y - (aX + b)\big)^2\Big) = \mathrm{V}\big(Y - (aX + b)\big) + \mathrm{E}\big(Y - (aX + b)\big)^2.$$

D'une part

$$\mathrm{V}\big(Y - (aX + b)\big) = \mathrm{V}(Y - aX) = a^2 \mathrm{V}(X) - 2a \operatorname{Cov}(X, Y) + \mathrm{V}(Y)$$

et donc

$$\begin{aligned} \mathrm{V}\big(Y - (aX + b)\big) &= \mathrm{V}(Y - aX) \\ &= \left(a - \frac{\operatorname{Cov}(X, Y)}{\mathrm{V}(X)}\right)^2 \mathrm{V}(X) + \frac{\mathrm{V}(X)\mathrm{V}(Y) - (\operatorname{Cov}(X, Y))^2}{\mathrm{V}(X)}. \end{aligned}$$

D'autre part

$$\mathrm{E}\big(Y - (aX + b)\big)^2 = 0 \text{ pour } b = \mathrm{E}(Y) - aE(X).$$

On en déduit que

$$\mathrm{E}\Big(\big(Y - (aX + b)\big)^2\Big)$$

est minimale pour

$$a = \frac{\operatorname{Cov}(X, Y)}{\mathrm{V}(X)} \text{ et } b = \frac{\mathrm{V}(X)\mathrm{E}(Y) - \operatorname{Cov}(X, Y)\mathrm{E}(X)}{\mathrm{V}(X)}.$$

Ces valeurs de $a$ et $b$ réalisent une régression linéaire : elles donnent la meilleure expression linéaire de $Y$ en fonction de $X$.

**Exercice 14 :** [énoncé]
Par la formule de Huygens

$$\mathrm{E}\big((Y - S)^2\big) = \mathrm{V}(Y - S) + \big(\mathrm{E}(Y - S)\big)^2$$

avec

$$\mathrm{E}(Y - S) = (a - 1)m_S + b$$

et

$$\mathrm{V}(Y - S) = \mathrm{V}\big((a - 1)S + aB + b\big) = (a - 1)^2\sigma_s^2 + a^2\sigma_B^2$$

car la covariance de $S$ et $B$ est nulle.
La quantité $\mathrm{V}(Y - S)$ est minimale pour

$$a = \frac{\sigma_S^2}{\sigma_S^2 + \sigma_B^2}$$

et l'on peut alors rendre le terme $\big(\mathrm{E}(Y - S)\big)^2$ nul pour

$$b = (1 - a)m_S.$$

Au final

$$Y = \frac{\sigma_S^2}{\sigma_S^2 + \sigma_B^2} X + \frac{\sigma_B^2}{\sigma_S^2 + \sigma_B^2} m_S.$$

**Exercice 15 :** [énoncé]

(a) On a

$$\mathrm{V}(X) = \operatorname{Cov}(X, X).$$

Par bilinéarité

$$\mathrm{V}(a_1 X_1 + \cdots + a_n X_n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_i a_j \mathrm{V}(X_i, X_j).$$

Ce calcul est aussi le résultat du produit matriciel

$${}^t C \Sigma C \text{ avec } C = {}^t\begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{pmatrix}.$$

(b) Soit $C = {}^t\big(a_1 \quad \cdots \quad a_n\big)$ un vecteur propre de $\Sigma$ associé à une valeur propre $\lambda$.
On a ${}^tC\Sigma C = \lambda {}^tCC = \lambda\|C\|^2$ et, pour $X = a_1X_1 + \cdots + a_nX_n$, $\mathrm{V}(X) \geq 0$ donc
$$\lambda = \frac{\mathrm{V}(X)}{\|C\|^2} \geq 0.$$

**Exercice 16 :** [énoncé]

(a) Le plus efficace est sans doute de raisonner par les fonctions génératrices. On obtient une loi binomiale de paramètres $n$ et $p$.

(b) $(U-1)^2$ prend les valeurs 0 et 1 avec
$$\mathrm{P}\big((U-1)^2 = 1\big) = \mathrm{P}(U=1) = \frac{1}{2}.$$
Les variables $(U-1)^2$ et $(V-1)^2$ suivent chacune une loi de Bernoulli de paramètre $1/2$. Par indépendance de $U$ et $V$, on a aussi celle de $(U-1)^2$ et $(V-1)^2$ et donc $S$ suit une loi $\mathcal{B}(2,1/2)$.

(c) Par indépendance, l'espérance d'un produit est le produit des espérances
$$\mathrm{E}\big(S(T-1)\big) = \mathrm{E}\big((U-1)^3\big)\mathrm{E}(V-1) + \mathrm{E}(U-1)\mathrm{E}\big((V-1)^3\big) = 0.$$
La variable $T$ prend les valeurs 0, 1 et 2.
$$\mathrm{P}(T=0) = \mathrm{P}(U=0,V=2) + \mathrm{P}(U=2,V=0) = \frac{1}{8}$$
et
$$\mathrm{P}(T=2) = \mathrm{P}(U=0,V=0) + \mathrm{P}(U=2,V=2) = \frac{1}{8}.$$
On en tire $\mathrm{P}(T=1) = 3/4$.
Par la formule de Huygens
$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(S,T) &= \mathrm{E}(ST) - \mathrm{E}(S)\mathrm{E}(T)\\ &= \mathrm{E}\big(S(T-1)\big) + \mathrm{E}(S) - \mathrm{E}(S)\mathrm{E}(T)\\ &= 0 + 1 - 1 = 0.\end{aligned}$$
La covariance nulle ne suffit pas à affirmer l'indépendance de $S$ et $T$.
Étudions l'événement $(S=0,T=0)$.
L'événement $(S=0)$ correspond à $(U=1,V=1)$ alors que $(T=0)$ correspond à $(U=0,V=2)\cup(U=2,V=0)$. Ceux-ci sont incompatibles et donc
$$\mathrm{P}(S=0,T=0) = 0 \neq \mathrm{P}(S=0)\mathrm{P}(T=0).$$
Les variables $S$ et $T$ ne sont pas indépendantes.

**Exercice 17 :** [énoncé]

*Une variable aléatoire admet une variance nulle est presque sûrement constante.*

Les variables aléatoires $X_1$ et $X_2$ sont presque sûrement bornées car elles suivent la loi de la variable bornée $X$, elles admettent donc chacune une variance et on peut aussi calculer la variance de leur somme :
$$\mathrm{V}(X_1+X_2) = \mathrm{V}(X_1) + 2\,\mathrm{Cov}(X_1,X_2) + \mathrm{V}(X_2).$$
Cependant,
$$\mathrm{V}(X_1) = \mathrm{V}(X_2) = \mathrm{V}(X) \quad \text{et} \quad \mathrm{V}(X_1+X_2) = \mathrm{V}(2X) = 4\mathrm{V}(X).$$
On en déduit $\mathrm{Cov}(X_1,X_2) = 2\mathrm{V}(X)$ puis
$$\mathrm{V}(X_1-X_2) = \mathrm{V}(X_1) - 2\,\mathrm{Cov}(X_1,X_2) + \mathrm{V}(X_2) = 0.$$
La variable $X_1 - X_2$ est donc presque sûrement constante égale à 0 et on peut conclure que $X_1$ et $X_2$ sont presque sûrement égales.

**Exercice 18 :** [énoncé]
Les variables $X$ et $Y$ sont à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ donc $X+Y$ est à valeurs $\mathbb{N}\setminus\{0,1\}$.
Pour $k \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}$, on a
$$\mathrm{P}(X+Y=k) = \sum_{\ell=1}^{k-1} \mathrm{P}(X=\ell, Y=k-\ell).$$
Par indépendance
$$\mathrm{P}(X+Y=k) = \sum_{\ell=1}^{k-1} \mathrm{P}(X=\ell)\mathrm{P}(Y=k-\ell).$$
Il ne reste plus qu'à dérouler les calculs :
$$\mathrm{P}(X+Y=k) = (k-1)p^2(1-p)^{k-2}.$$

**Exercice 19 :** [énoncé]

(a) Posons
$$u_n = \mathrm{P}(X=n) = \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}.$$
On a
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\lambda}{n+1}$$
donc si $n+1 \leq \lambda$ alors $u_{n+1} \geq u_n$ et si $n+1 > \lambda$ alors $u_{n+1} < u_n$.
La valeur maximale de $u_n$ est donc obtenue pour $n = \lfloor \lambda \rfloor$.

(b) Il suffit d'étudier les variations de la fonction $\lambda \mapsto \mathrm{e}^{-\lambda}\lambda^n$. La probabilité sera maximale si $\lambda = n$.

**Exercice 20 :** [énoncé]
Par la formule de transfert
$$\mathrm{E}\left(\frac{1}{X}\right) = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k}(1-p)^{k-1}p = \frac{p}{1-p}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(1-p)^k}{k}.$$
Or pour $x \in \left]-1\,;1\right[$
$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k}x^k = -\ln(1-x)$$
donc
$$\mathrm{E}\left(\frac{1}{X}\right) = \frac{p}{p-1}\ln p.$$

**Exercice 21 :** [énoncé]
L'évènement $X$ est pair est la réunion dénombrable des évènements $(X=2k)$ pour $k \in \mathbb{N}$. Sa probabilité vaut
$$\sum_{k=0}^{+\infty}\mathrm{P}(X=2k) = \sum_{k=0}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^{2k}}{(2k)!} = \mathrm{e}^{-\lambda}\operatorname{ch}(\lambda) = \frac{1+\mathrm{e}^{-2\lambda}}{2}.$$

**Exercice 22 :** [énoncé]
L'événement $(X<Y)$ peut être décomposé en la réunion disjointes des événements
$$(X=k, Y>k) \text{ avec } k \in \mathbb{N}^*.$$
On a donc
$$\mathrm{P}(X<Y) = \sum_{k=1}^{+\infty}\mathrm{P}(X=k, Y>k).$$
Par indépendance des variables $X$ et $Y$, on a
$$\mathrm{P}(X=k, Y>k) = \mathrm{P}(X=k)\mathrm{P}(Y>k)$$
avec
$$\mathrm{P}(X=k) = p(1-p)^{k-1} \text{ et } \mathrm{P}(Y>k) = (1-q)^k.$$
On en déduit
$$\mathrm{P}(X<Y) = \sum_{k=1}^{n}p(1-q)\big((1-p)(1-q)\big)^{k-1} = \frac{p-pq}{p+q-pq}.$$

**Exercice 23 :** [énoncé]

(a) Distinguons les cinq dés et notons pour chacun $X_1,\dots,X_5$ les variables aléatoires donnant le nombre de lancers nécessaires avant que le dé correspondant ne produise un « As ». Ces variables aléatoires suivent des lois géométriques indépendantes de paramètre $p = 1/6$ et $T = \max(X_1,\dots,X_5)$. On a
$$(T \leq n) = (X_1 \leq n) \cap \ldots \cap (X_n \leq n).$$
Par indépendance
$$\mathrm{P}(T \leq n) = \mathrm{P}(X_1 \leq n)\ldots\mathrm{P}(X_5 \leq n)$$
avec
$$\mathrm{P}(X_i \leq n) = 1 - \mathrm{P}(X_i > n) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n.$$
Ainsi
$$\mathrm{P}(T \leq n) = \left(1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n\right)^5.$$

(b) Sous réserve de convergence
$$\mathrm{E}(T) = \sum_{n=0}^{+\infty}\mathrm{P}(T>n).$$
Ici
$$\sum_{n=0}^{+\infty}\mathrm{P}(T>n) = \sum_{n=0}^{+\infty}1 - \left(1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n\right)^5.$$

En développant la puissance

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{P}(T > n) = 5\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{5}{6}\right)^n - 10\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{5}{6}\right)^{2n} + 10\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{5}{6}\right)^{3n} - 5\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{5}{6}\right)^{4n} + \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{5}{6}\right)^{5n}$$

avec convergence des séries écrites.
Finalement

$$\mathrm{E}(T) = \sum_{k=1}^{5}(-1)^{k-1}\binom{5}{k}\frac{1}{1-(5/6)^k}.$$

**Exercice 24 :** [énoncé]
Une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & b \end{pmatrix}$$

est diagonalisable si $a \neq b$ (2 valeurs propres distinctes pour une matrice de taille 2) et ne l'est pas si $a = b$ (1 seule valeur propre et n'est pas une matrice scalaire).
La probabilité recherchée n'est donc autre que

$$\mathrm{P}(X \neq Y).$$

L'événement $(X \neq Y)$ est le complémentaire de l'événement $(X = Y)$ qui est la réunion d'événements deux à deux disjoints

$$(X = Y) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*}(X = n, Y = n).$$

Par indépendance

$$\mathrm{P}(X = n, Y = n) = \mathrm{P}(X = n)\mathrm{P}(Y = n) = pq\big((1-p)(1-q)\big)^{n-1}.$$

Ainsi

$$\mathrm{P}(X = Y) = \frac{pq}{p+q-pq}.$$

Finalement, la probabilité que la matrice soit diagonalisable vaut

$$1 - \mathrm{P}(X = Y) = \frac{p+q-2pq}{p+q-pq}.$$

**Exercice 25 :** [énoncé]

(a) Pour $s \leq t$, l'événement $A(0,0,s)$ contient l'événement $A(0,0,t)$ et donc $p_0(s) \geq p_0(t)$.
Pour $s, t \geq 0$, l'événement$A(0,0,s+t)$ est la conjonction des événements $A(0,0,s)$ et $A(0,s,s+t)$. Par conséquent

$$\mathrm{P}(A(0,0,s+t) = \mathrm{P}\big(A(0,0,s) \cap A(0,s,s+t)\big).$$

Par indépendance (hypothèse H1)

$$\mathrm{P}\big(A(0,0,s+t)\big) = \mathrm{P}\big(A(0,0,s)\big)\mathrm{P}\big(A(0,s,s+t)\big).$$

Or, l'hypothèse H2 donne $\mathrm{P}\big(A(0,s,s+t)\big) = \mathrm{P}(A(0,0,t))$ et donc

$$p_0(s+t) = p_0(s)p_0(t).$$

(b) Par l'hypothèse H3, la fonction $p_0$ prend la valeur 1 en 0 et est continue. Si par l'absurde cette fonction prend une valeur négative, elle s'annule en un certain $t_0 > 0$. L'équation fonctionnelle obtenue ci-dessus donne par une récurrence rapide

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall t \in \mathbb{R}, p_0(kt) = p_0(t)^k.$$

En prenant $t = t_0/k$, on obtient

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, p_0(t_0/k) = 0.$$

En passant à limite quand $k$ tend vers l'infini, on obtient l'absurdité $p_0(0) = 0$ !
Puisqu'il est maintenant acquis que la fonction $p_0$ est à valeurs strictement positives, on peut introduire la fonction $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, f(t) = \ln\big(p_0(t)\big).$$

L'équation fonctionnelle obtenue en a) se traduit

$$\forall s, t \in \mathbb{R}_+, f(s+t) = f(s) + f(t).$$

Sachant la fonction $f$ continue, on peut affirmer que celle-ci est linéaire : il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, f(t) = at.$$

Ainsi,

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, p_0(t) = \mathrm{e}^{at}.$$

Enfin, puisque la fonction $p_0$ est décroissante, le réel $a$ est nécessairement négatif ce qui permet de l'écrire $-\lambda$ avec $\lambda \in \mathbb{R}_+$.

(c) Par l'hypothèse H5 avec $p_0(t) \underset{t\to0^+}{=} 1-\lambda t+\mathrm{o}(t)$, on obtient

$$p_1(t)+\mathrm{o}(p_1(t)) \underset{t\to0^+}{=} \lambda t+\mathrm{o}(t).$$

Ainsi $p_1(t) \underset{t\to0^+}{\sim} \lambda t$ ce qui peut encore s'écrire

$$p_1(t) \underset{t\to0^+}{=} \lambda t+\mathrm{o}(t).$$

Aussi, l'hypothèse H4 permet d'affirmer

$$\forall n\geq 2, p_n(t)\leq 1-p_0(t)-p_1(t) \underset{t\to0^+}{=} \mathrm{o}(t)$$

et donc $p_n(t) \underset{t\to0^+}{=} \mathrm{o}(t)$ pour tout $n\geq 2$.

(d) L'événement $A(n,0,s+t)$ est la réunion des événements deux à deux disjoints

$$A(k,0,s)\cap A(n-k,s,s+t) \text{ pour } k\in [\![0\,;n]\!].$$

On en déduit par additivité et les hypothèses H1 et H2 l'identité

$$p_n(s+t)=\sum_{k=0}^{n}\mathrm{P}(A(k,0,s))\mathrm{P}(A(n-k,s,s+t))=\sum_{k=0}^{n}p_k(s)p_{n-k}(t).$$

Cette identité fournit le développement asymptotique

$$p_n(t+s) \underset{s\to0^+}{=} (1-\lambda s+\mathrm{o}(s))p_n(t)+\lambda s p_{n-1}(t)+\mathrm{o}(s)$$

car

$$p_0(s) \underset{s\to0^+}{=} 1-\lambda s+\mathrm{o}(s), p_1(s) \underset{s\to0^+}{=} \lambda s+\mathrm{o}(s) \text{ et } p_k(s) \underset{s\to0^+}{=} \mathrm{o}(s) \text{ pour } k\geq 2.$$

On obtient alors

$$\frac{1}{s}\big(p_n(t+s)-p_n(t)\big) \underset{s\to0^+}{=} \lambda p_{n-1}(t)-\lambda p_n(t)+\mathrm{o}(1).$$

On en déduit que la fonction $p_n$ est dérivable et

$$p_n'(t)=\lambda(p_{n-1}(t)-p_n(t)).$$

(e) En introduisant $q_n(t)=\mathrm{e}^{\lambda t}p_n(t)$, on constate

$$q_0(t)=1 \text{ et } q_n'(t)=\lambda q_{n-1}(t).$$

Par récurrence

$$q_n(t)=\frac{(\lambda t)^n}{n!}$$

puis

$$\forall n\in\mathbb{N}, \forall t\in\mathbb{R}_+, p_n(t)=\mathrm{e}^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}.$$

(f) L'événement $(X=n)$ a la probabilité de l'événement $A(n,0,T)$ et donc

$$\mathrm{P}(X=n)=p_n(T)=\mathrm{e}^{-\lambda T}\frac{(\lambda T)^n}{n!}.$$

La variable $X$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda T$. L'espérance de $X$ vaut alors $\lambda T$ et le paramètre $\lambda$ se comprend comme le nombre moyen de clients entrant par unité de temps.

**Exercice 26 :** [énoncé]

(a) Pour $(n,k)\in\mathbb{N}^2$. Si $k\leq n$ alors

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X=n,Y=k)&=\mathrm{P}(X=n)\mathrm{P}(Y=k\,|\,X=n)\\&=\mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}.\end{aligned}$$

Si $k>n$ alors $\mathrm{P}(X=n,Y=k)=0$.

(b) Pour $k\in\mathbb{N}$

$$\mathrm{P}(Y=k)=\sum_{n=0}^{+\infty}\mathrm{P}(X=n,Y=k)=\sum_{n=k}^{+\infty}\mathrm{P}(X=n,Y=k).$$

Après réorganisation et glissement d'indice

$$\mathrm{P}(Y=k)=\frac{(\lambda p)^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}(1-p)^n\lambda^n=\mathrm{e}^{-\lambda p}\frac{(\lambda p)^k}{k!}.$$

La variable $Y$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda p$.

**Exercice 27 :** [énoncé]

(a) La loi conjointe de $X$ et $Y$ déterminant une probabilité

$$\sum_{j=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty}\mathrm{P}(X=j,Y=k)=1.$$

Or

$$\sum_{j=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty}\mathrm{P}(X=j,Y=k)=a\mathrm{e}^2$$

donc $a=\mathrm{e}^{-2}$.

(b) Pour $j \in \mathbb{N}$
$$\mathrm{P}(X=j)=\sum_{k=0}^{+\infty}\mathrm{P}(X=j,Y=k)=\frac{\mathrm{e}^{-1}}{j!}$$
et donc $X$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 1$. Il en est de même pour $Y$.

(c) Les variables sont indépendantes car l'on vérifie aisément
$$\mathrm{P}(X=j,Y=k)=\mathrm{P}(X=j)\mathrm{P}(Y=k).$$

**Exercice 28 :** [énoncé]

(a) La loi conjointe de $X$ et $Y$ déterminant une probabilité
$$\sum_{j=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty}\mathrm{P}(X=j,Y=k)=1.$$
Or
$$\sum_{j=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty}\mathrm{P}(X=j,Y=k)=8a$$
car
$$\sum_{j=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{j}{2^{j+k}}=\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{j}{2^{j-1}}=\frac{1}{(1-1/2)^2}=4.$$
On en déduit $a=1/8$

(b) Pour $j \in \mathbb{N}$
$$\mathrm{P}(X=j)=\sum_{k=0}^{+\infty}\mathrm{P}(X=j,Y=k)=\frac{j+1}{2^{j+2}}$$
et pour $k\in\mathbb{N}$
$$\mathrm{P}(Y=k)=\sum_{j=0}^{+\infty}\mathrm{P}(X=j,Y=k)=\frac{k+1}{2^{k+2}}.$$

(c) Les variables ne sont par indépendantes car l'on vérifie aisément
$$\mathrm{P}(X=j,Y=k)\neq\mathrm{P}(X=j)\mathrm{P}(Y=k)$$
pour $j=k=0$.

(d) Par probabilités totales
$$\mathrm{P}(X=Y)=\sum_{n=0}^{+\infty}\mathrm{P}(X=n,Y=n)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2n}{2^{2n+3}}=\frac{1}{9}.$$

**Exercice 29 :** [énoncé]

(a) La loi conjointe de $X$ et $Y$ déterminant une probabilité
$$\sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty}\mathrm{P}(X=k,Y=n)=1.$$
En réordonnant les sommes et en simplifiant les zéros
$$\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n}\mathrm{P}(X=k,Y=n)=\sum_{n=0}^{+\infty}p\bigl(2a(1-p)\bigr)^n=p\frac{1}{1-(2a(1-p))}.$$
On est donc amené à résoudre l'équation
$$1-2a(1-p)=p$$
ce qui conduit à la solution $a=1/2$.

(b) Pour $n\in\mathbb{N}$,
$$\mathrm{P}(Y=n)=\sum_{k=0}^{n}\mathrm{P}(X=k,Y=n)=\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}p(1-p)^n=p(1-p)^n.$$

(c) Pour $k\in\mathbb{N}$,
$$\mathrm{P}(X=k)=\sum_{n=k}^{+\infty}\binom{n}{k}p\left(\frac{1-p}{2}\right)^n=p\left(\frac{1-p}{2}\right)^k\frac{1}{(1-\frac{1-p}{2})^{k+1}}.$$
En simplifiant
$$\mathrm{P}(X=k)=\left(1-\frac{1-p}{1+p}\right)\left(\frac{1-p}{1+p}\right)^k.$$

(d) Les variables ne sont par indépendantes car l'on vérifie aisément
$$\mathrm{P}(X=k,Y=n)\neq\mathrm{P}(X=k)\mathrm{P}(Y=n)$$
pour $k=n=0$.

**Exercice 30 :** [énoncé]

(a) En éliminant de l'univers des possibles l'événement négligeable où la pièce tombe toujours du même côté, la variable aléatoire $X$ prend ses valeurs dans $\mathbb{N}^*$. De même, en éliminant aussi l'événement négligeable où la deuxième succession est de longueur infinie, la variable $Y$ est aussi définie à valeurs dans $\mathbb{N}^*$. On poursuit l'étude en supposant être dans l'univers probabiliste correspondant.

Pour $k, \ell \in \mathbb{N}^*$, calculons $\mathrm{P}(X = k, Y = \ell)$. D'une part, l'événement $(X = k, Y = \ell)$ est réalisé lorsque les $k$ premiers lancers tombent côté Pile, les $\ell$ suivants coté Face et le $k + \ell + 1$-ième coté Pile. D'autre part, l'événement $(X = k, Y = \ell)$ est aussi réalisé dans la situation inverse où l'on échange Pile et Face et dans nulle autre situation. Par incompatibilité de ces deux situations et par l'indépendance des lancers, on obtient

$$\mathrm{P}(X = k, Y = \ell) = p^k(1-p)^\ell p + (1-p)^k p^\ell (1-p)$$

(b) Les lois marginales de $X$ et $Y$ se déduisent de la loi conjointe. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathrm{P}(X = k) = \sum_{\ell=1}^{+\infty} \mathrm{P}(X = k, Y = \ell)$$

ce qui donne après sommations géométriques de raisons $1-p$ et $p \in \left]0\,;1\right[$ :

$$\mathrm{P}(X = k) = (1-p)p^k + p(1-p)^k$$

Un calcul analogue donne, pour $\ell \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathrm{P}(Y = \ell) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathrm{P}(X = k, Y = \ell) = p^2(1-p)^{\ell-1} + (1-p)^2 p^{\ell-1}$$

On peut ensuite calculer les espérances de $X$ et $Y$ en rappelant [3]

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k(1-p)^{k-1}p = \frac{1}{p} \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{+\infty} kp^{k-1}(1-p) = \frac{1}{1-p}$$

On obtient

$$\mathrm{E}(X) = \frac{p}{1-p} + \frac{1-p}{p} = \frac{p^2 + (1-p)^2}{p(1-p)}$$

et

$$\mathrm{E}(Y) = \frac{p}{p} + \frac{1-p}{1-p} = 2$$

Enfin, l'inégalité $a^2 + b^2 \geq 2ab$ valable pour tous $a$ et $b$ réels permet d'affirmer la comparaison

$$\mathrm{E}(X) \geq \frac{2p(1-p)}{p(1-p)} = 2 = \mathrm{E}(Y)$$

**Exercice 31 :** [énoncé]

*On détermine la loi conjointe de $U$ et $V$ afin d'en déduire les lois de $U$ et $V$ puis d'étudier leurs indépendance.*

Les variables $X$ et $Y$ prennent leur valeurs dans $\mathbb{N}^*$. La variable $U$ prend donc aussi ses valeurs dans $\mathbb{N}^*$ tandis que la variable $V$ prend les siennes dans $\mathbb{N}$.
Soient $k \in \mathbb{N}^*$ et $\ell \in \mathbb{N}$. On peut décrire l'événement $(U = k, V = \ell)$ à l'aide des variables $X$ et $Y$ : l'une est égale à $k$ et l'autre à $k + \ell$

$$(U = k, V = \ell) = (X = k, Y = k + \ell) \cup (X = k + \ell, Y = k)$$

Si $\ell \neq 0$, on obtient par réunion d'événements incompatibles puis indépendance des variables $X$ et $Y$

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(U = k, V = \ell) &= \mathrm{P}(X = k, Y = k + \ell) + \mathrm{P}(X = k + \ell, Y = k)\\ &= \mathrm{P}(X = k)\mathrm{P}(Y = k + \ell) + \mathrm{P}(X = k + \ell)\mathrm{P}(Y = k)\\ &= pq(1-p)^{k-1}(1-q)^{k-1}\big((1-p)^\ell + (1-q)^\ell\big)\end{aligned}$$

Si $\ell = 0$, il vient

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(U = k, V = 0) &= \mathrm{P}(X = k, Y = k) = \mathrm{P}(X = k)\mathrm{P}(Y = k)\\ &= pq(1-p)^{k-1}(1-q)^{k-1}\end{aligned}$$

Ceci détermine la loi conjointe de $U$ et $V$ et on peut en déduire les lois des variables $U$ et $V$.
Pour $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathrm{P}(U = k) = \sum_{\ell=0}^{+\infty} \mathrm{P}(U = k, V = \ell)$$

On isole de la somme le terme d'indice 0 et on poursuit le calcul à l'aide de sommations géométriques de raisons $(1-p)$ et $(1-q) \in \left]0\,;1\right[$ :

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(U = k) &= pq(1-p)^{k-1}(1-q)^{k-1}\left(1 + \frac{1-p}{p} + \frac{1-q}{q}\right)\\ &= (1-p)^{k-1}(1-q)^{k-1}(p + q - pq)\end{aligned}$$

3. Ces formules correspondent au calcul de l'espérance de lois géométriques de paramètres $p$ et $1-p$.

La variable $U$ suit une loi géométrique[4] de paramètre $r = p + q - pq$.
Pour $\ell \in \mathbb{N}$,

$$\mathrm{P}(V = \ell) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathrm{P}(U = k, V = \ell)$$

En distinguant le cas $\ell = 0$ du cas général, on obtient au terme des calculs :

$$\mathrm{P}(V = 0) = \frac{pq}{p + q - pq} \quad \text{et} \quad \mathrm{P}(V = \ell) = \frac{pq}{p + q - pq}\big((1-p)^\ell + (1-q)^\ell\big) \quad \text{pour } \ell \geq 1$$

On peut alors conclure que les variables $U$ et $V$ sont indépendantes puisque

$$\mathrm{P}(U = k, V = \ell) = \mathrm{P}(U = k)\mathrm{P}(V = \ell) \quad \text{pour tous } k \in \mathbb{N} \text{ et } \ell \in \mathbb{N}^*$$

**Exercice 32 :** [énoncé]

(a) Soit $(k, \ell) \in \mathbb{N}^2$. La somme des variables $X$ et $Y$ étant égales à $N$, on a l'égalité

$$\mathrm{P}(X = k, Y = \ell) = \mathrm{P}(X = k, N = k + \ell) = \mathrm{P}(X = k \mid N = k + \ell)\mathrm{P}(N = k + \ell). \tag{3}$$

Cependant, lorsque $N$ vaut $k + \ell$, la variable aléatoire $X$ suit une loi binomiale de paramètres $k + \ell$ et $p$ en tant que somme de $k + \ell$ variables de Bernoulli indépendantes de même paramètre $p$. On en déduit

$$\mathrm{P}(X = k \mid N = k + \ell) = \binom{k+\ell}{k} p^k (1-p)^\ell$$

et l'égalité (??) donne alors celle voulue.

(b) À partir de la loi conjointe de $X$ et $Y$, on peut déterminer les lois marginales. Les variables $X$ et $Y$ sont à valeurs dans $\mathbb{N}$ et, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\mathrm{P}(X = k) = \sum_{\ell=0}^{+\infty} \mathrm{P}(X = k, Y = \ell) = \sum_{\ell=0}^{+\infty} \binom{k+\ell}{k} p^k (1-p)^\ell \mathrm{e}^{-\lambda} \frac{\lambda^{k+\ell}}{(k+\ell)!}.$$

Après simplification et factorisation des termes qui ne dépendent pas de $\ell$,

$$\mathrm{P}(X = k) = \mathrm{e}^{-\lambda} \frac{(p\lambda)^k}{k!} \sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{1}{\ell!}\big((1-p)\lambda\big)^\ell.$$

On reconnaît alors une somme exponentielle et on achève le calcul :

$$\mathrm{P}(X = k) = \mathrm{e}^{-\lambda} \frac{(p\lambda)^k}{k!} \mathrm{e}^{\lambda(1-p)} = \mathrm{e}^{-\lambda p} \frac{(p\lambda)^k}{k!}.$$

Ainsi, $X$ suit une loi de Poisson de paramètre $p\lambda$. Un calcul analogue montre que $Y$ suit une loi de Poisson de paramètre $(1-p)\lambda$ et on vérifie alors pour tout $(k, \ell) \in \mathbb{N}^2$

$$\mathrm{P}(X = k, Y = \ell) = \binom{k+\ell}{k} p^k (1-p)^\ell \mathrm{e}^{-\lambda} \frac{\lambda^{k+\ell}}{(k+\ell)!} = \mathrm{P}(X = k)\mathrm{P}(Y = \ell).$$

Les variables $X$ et $Y$ sont indépendantes.

(c) *Pour $k \in [\![0\,;n]\!]$, l'événement $(X = k)$ contient $(X = k, N = n)$.*

La variable $N$ n'étant pas presque sûrement constante, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathrm{P}(N = n) > 0$. On a alors

$$p_k = \mathrm{P}(X = k) \geq \mathrm{P}(X = k, N = n) = \binom{k+\ell}{k} p^k (1-p)^\ell \mathrm{P}(N = n) > 0.$$

De la même façon, on établit $q_k > 0$ pour tout $k \in [\![0\,;n]\!]$. En particulier, on en déduit

$$\mathrm{P}(N = 2n) \geq \mathrm{P}(X = n, Y = n) = \mathrm{P}(X = n)\mathrm{P}(Y = n) = p_n q_n > 0$$

et l'ensemble des $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathrm{P}(N = n) > 0$ ne peut être majoré. Le raisonnement qui précède peut alors être mené avec des valeurs de $n$ arbitrairement grandes : les $p_k$ et $q_\ell$ sont tous strictement positifs.

(d) *Les probabilités de $(X = k+1, Y = \ell)$ et de $(X = k, Y = \ell + 1)$ sont toutes deux liées à la probabilité de $(N = k + \ell + 1)$*

Par l'égalité obtenue à la première question et l'indépendance des variables $X$ et $Y$, on a

$$p_{k+1} q_\ell = \mathrm{P}(X = k+1, Y = \ell) = \binom{k+\ell+1}{k+1} p^{k+1} (1-p)^\ell \mathrm{P}(N = k + \ell + 1)$$

et

$$p_k q_{\ell+1} = \mathrm{P}(X = k, Y = \ell + 1) = \binom{k+\ell+1}{k} p^k (1-p)^{\ell+1} \mathrm{P}(N = k + \ell + 1).$$

4. Voir sujet ? ? ?.

Sachant

$$(k+1)\binom{k+\ell+1}{k+1} = \frac{(k+\ell+1)!}{k!\,\ell!} = (\ell+1)\binom{k+\ell+1}{k}$$

on obtient

$$(k+1)p_{k+1}q_\ell(1-p) = (\ell+1)p_k q_{\ell+1}p.$$

(e) La relation précédente pour $\ell = 0$ donne

$$p_{k+1} = \frac{1}{k+1}\cdot\frac{pq_1}{(1-p)q_0}p_k.$$

On en déduit par une récurrence facile

$$p_k = \frac{1}{k!}\left(\frac{pq_1}{(1-p)q_0}\right)^k p_0 \quad \text{pour tout } k\in\mathbb{N}.$$

À un facteur près, l'expression de $p_k$ s'apparente à celle d'une loi de Poisson de paramètre

$$\lambda = \frac{pq_1}{(1-p)q_0} > 0.$$

La somme des $p_k$ devant être égale à 1, la valeur du facteur $p_0$ ne peut être autre que celle qui apparaît pour une loi de Poisson de paramètre $\lambda$. On en déduit que $X$ suit cette loi de Poisson.

(f) Un calcul analogue montre que $Y$ suit aussi une loi de Poisson et les variables $X$ et $Y$ étant indépendantes, leur somme $N$ suit encore une loi de Poisson [5].

**Exercice 33 :** [énoncé]

(a) $T_1$ suit une loi géométrique de paramètre $p$.

(b) Notons $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite des variables de Bernoulli testant la réussite de chaque expérience.
L'évènement $(T_m = n)$ est la réunion correspond à l'évènement
$X_1+\dots+X_n = m$ et $X_n = 1$ soit encore
$X_1+\dots+X_{n-1} = m-1$ et $X_n = 1$. Par indépendance

$$\mathrm{P}(T_m = n) = \mathrm{P}(X_1+\dots+X_{n-1} = m-1)\mathrm{P}(X_n = 1).$$

Puisque $X_1+\dots+X_{n-1}\sim\mathcal{B}(n-1,p)$ et $X_n\sim\mathcal{B}(p)$, on obtient

$$\mathrm{P}(T_m = n) = \binom{n-1}{m-1}p^m(1-p)^{n-m}$$

et écriture vaut aussi quand $n\leq m$ car le coefficient binomial est alors nul.

(c) En exploitant le développement connu de $(1+u)^\alpha$, on obtient

$$\frac{1}{(1-t)^m} = \sum_{n=0}^{+\infty}\binom{n+m-1}{m-1}t^n \text{ pour } t\in\,]-1\,;1[.$$

(d) Par définition

$$G_{T_m}(t) = \sum_{n=0}^{+\infty}\binom{n-1}{m-1}p^m(1-p)^{n-m}t^n.$$

En isolant les premiers termes nuls et en décalant l'indexation

$$G_{T_m}(t) = \sum_{n=0}^{+\infty}\binom{n+m-1}{m-1}(pt)^m\big((1-p)t\big)^n = \frac{(pt)^m}{\big(1-(1-p)t\big)^m}.$$

On en déduit

$$\mathrm{E}(X) = G'_{T_m}(1) = \frac{m}{p}.$$

**Exercice 34 :** [énoncé]

(a) Par la formule de transfert

$$\mathrm{E}\big(X(X-1)\dots(X-r+1)\big) = \sum_{k=r}^{+\infty}\frac{k!}{(k-r)!}\mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} = \lambda^r.$$

(b) La fonction génératrice de $X$ est

$$G_X(t) = \mathrm{E}(t^X) = \mathrm{e}^{\lambda(t-1)}.$$

Celle-ci est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$G_X^{(r)}(t) = \mathrm{E}\big(X(X-1)\dots(X-r+1)t^X\big) = \lambda^r\mathrm{e}^{\lambda(t-1)}.$$

En particulier

$$G_X^{(r)}(1) = \mathrm{E}\big(X(X-1)\dots(X-r+1)\big) = \lambda^r.$$

**Exercice 35 :** [énoncé]

5. Voir sujet ? ? ?.

(a) Par la formule de transfert

$$\mathrm{E}\big(X(X-1)\dots(X-r+1)\big)=\sum_{k=r}^{+\infty}k(k-1)\dots(k-r+1)(1-p)^{k-1}p.$$

Or

$$\sum_{k=r}^{+\infty}k(k-1)\dots(k-r+1)x^{k-r}=\frac{\mathrm{d}^r}{\mathrm{d}x^r}\left(\frac{1}{1-x}\right)=\frac{r!}{(1-x)^{r+1}}$$

donc

$$\mathrm{E}\big(X(X-1)\dots(X-r+1)\big)=(1-p)^{r-1}\frac{r!}{p^r}.$$

(b) La fonction génératrice de $X$ est

$$G_X(t)=\mathrm{E}(t^X)=\frac{pt}{1-(1-p)t}=\frac{p}{p-1}+\frac{\frac{p}{1-p}}{1-(1-p)t}.$$

Celle-ci est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$G_X^{(r)}(t)=\mathrm{E}\big(X(X-1)\dots(X-r+1)t^X\big)=\frac{p}{1-p}\frac{r!(1-p)^r}{(1-(1-p)t)^{r+1}}.$$

En particulier

$$G_X^{(r)}(1)=\mathrm{E}\big(X(X-1)\dots(X-r+1)\big)=r!\frac{(1-p)^{r-1}}{p^r}.$$

**Exercice 36 :** [énoncé]

(a) On a

$$G_X(t)=\mathrm{E}(t^X)=\sum_{n=0}^{+\infty}\mathrm{P}(X=k)t^k=\mathrm{e}^{\lambda(t-1)}.$$

(b) $G'_X(1)=\mathrm{E}(X)=\lambda$, $G''_X(1)=\mathrm{E}\big(X(X-1)\big)=\lambda^2$ et
$G_X^{(3)}(1)=\mathrm{E}\big(X(X-1)(X-2)\big)=\lambda^3$.
On en déduit

$$\mathrm{E}(X^2)=\lambda^2+\lambda \text{ et } \mathrm{E}(X^3)=\lambda^3+3\lambda^2+\lambda$$

puis

$$\mathrm{E}\big((X-\lambda)^3\big)=\mathrm{E}(X^3)-3\lambda\mathrm{E}(X^2)+3\lambda^2\mathrm{E}(X)-\mathrm{E}(X)^3=\lambda.$$

**Exercice 37 :** [énoncé]

(a) $S_1$ suit une loi géométrique de paramètre $p$ et

$$G_{S_1}(t)=\frac{pt}{1-qt}.$$

(b) $S_m-S_{m-1}$ suit la même loi géométrique de paramètre $p$.

(c) On peut écrire

$$S_m=\sum_{k=1}^{m}S_k-S_{k-1} \text{ avec } S_0=0.$$

Or les variables aléatoires de cette somme sont indépendantes car la probabilité de l'événement

$$(S_1-S_0=n_1,S_2-S_1=n_2,\dots,S_m-S_{m-1}=n_m)$$

n'est autre que celle de l'événement

$$X_{n_1}=X_{n_1+n_2}=\dots=X_{n_1+\dots+n_m}=1.$$

$$\text{et } X_k=0 \text{ pour les autres indice } k \text{ de } [\![1\,;n_1+\dots+n_m]\!]$$

et les variables $X_1,\dots,X_{n_1+\dots+n_m}$ sont indépendantes.
On en déduit

$$G_{S_m}(t)=\left(\frac{pt}{1-qt}\right)^m.$$

Puisque

$$G_{S_m}(t)=\sum_{n=0}^{+\infty}\binom{m+n-1}{m-1}q^np^mt^{n+m}$$

on obtient

$$\mathrm{P}(S_m=n)=\binom{n-1}{m-1}q^{n-m}p^m \text{ pour } n\geq m.$$

**Exercice 38 :** [énoncé]

Notons $X_1,\dots,X_n$ les variables aléatoires fournissant les points obtenus lors des tirages.
Les variables $X_i$ suivent la même loi de fonction génératrice

$$G_X(t)=\frac{1}{4}+\frac{2}{4}t+\frac{1}{4}t^2=\left(\frac{1+t}{2}\right)^2.$$

Puisque $S = X_1 + \dots + X_n$ avec $X_1, \dots, X_n$ mutuellement indépendantes on a

$$G_S(t) = G_{X_1}(t) \dots G_{X_n}(t) = \left(G_X(t)\right)^n = \left(\frac{1+t}{2}\right)^{2n}.$$

En développant la somme

$$G_S(t) = \frac{1}{2^{2n}} \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} t^k.$$

Ceci détermine la loi de $S$ :

$$\forall k \in [\![0\,;2n]\!], \mathrm{P}(S = k) = \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{k}$$

$S$ suit une loi binomiale de paramètre $2n$ et $1/2$ : cela s'explique aisément car l'expérience de chaque tirage peut être modélisée par deux tirages successifs d'une pièce équilibrée.

**Exercice 39 :** [énoncé]
On introduit la fonction génératrice de $X$ :

$$G_X(t) = \frac{a}{n!} \sum_{k=0}^{+\infty} (n+k) \dots (k+1)(pt)^k.$$

Puisque

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (n+k) \dots (k+1) x^k = \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$$

on obtient

$$G_X(t) = \frac{a}{(1-pt)^{n+1}}.$$

Sachant $G_X(1) = 1$, on en tire la valeur de $a$

$$a = (1-p)^{n+1}.$$

On peut ensuite calculer espérance et variance

$$\mathrm{E}(X) = G_X'(1) = (n+1)\frac{p}{1-p} \text{ et } \mathrm{V}(X) = G_X''(1) + G_X'(1) - G_X'(1)^2 = (n+1)\frac{p}{(1-p)^2}.$$

**Exercice 40 :** [énoncé]
La fonction génératrice d'une variable $Y$ suivant une loi uniforme sur $[\![2\,;12]\!]$ est la fonction polynomiale

$$G_Y(t) = \frac{1}{12}\left(t^2 + t^3 + \dots + t^{12}\right).$$

Notons $G_{X_1}$ et $G_{X_2}$ les fonctions génératices de chacun des dés.

$$G_{X_1}(t) = \left(p_1 t + p_2 t^2 + \dots + p_6 t^6\right) \text{ et } G_{X_2}(t) = \left(q_1 t + q_2 t^2 + \dots + q_6 t^6\right).$$

La fonction génératrice de la somme $X_1 + X_2$ est donnée par

$$G_{X_1+X_2}(t) = G_{X_1}(t) \times G_{X_2}(t) = t^2\left(p_1 + p_2 t + \dots + p_6 t^5\right)\left(q_1 + q_2 t + \dots + q_6 t^5\right).$$

Pour que $G_Y = G_{X_1} G_{X_2}$, il faut $p_1 q_1 > 0$ et $p_6 q_6 > 0$ auquel cas les facteurs de degré 5 possèdent chacune une racine réelle non nulle. Cependant

$$G_Y(t) = \frac{1}{12} t^2 \frac{1-t^{11}}{1-t}$$

n'en possède pas !

**Exercice 41 :** [énoncé]

(a)
```
import random as rnd

def atteint(k,p):
    Y = 0
    while Y < k:
        x = rnd.random()
        if x < p:
            Y = Y + 2
        else:
            Y = Y + 1
    if Y == k:
        return 1
    else:
        return 0

def repete(k,p,N):
    x = 0
    for i in range(N):
        x = x + atteint(k,p)
    return x/N,1/(1+p)
```

(b)
$$E_k = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (S_n = k).$$

(c) Si $j = k$,
$$\mathrm{P}\big(E_k \cap (Y_1 = j)\big) = \mathrm{P}(Y_1 = k).$$
Si $j < k$, par incompatibilité des événements $(S_n = k)$ (car les $Y_i$ prennent des valeurs strictement positives)
$$\begin{aligned}\mathrm{P}\big(E_k \cap (Y_1 = j)\big) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \mathrm{P}\big(S_n = k, Y_1 = j\big)\\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \mathrm{P}(S_n = k \,|\, Y_1 = j)\mathrm{P}(Y_1 = j)\\ &= \sum_{n=2}^{+\infty} \mathrm{P}(S_n = k \,|\, Y_1 = j)\mathrm{P}(Y_1 = j)\\ &= \sum_{n=2}^{+\infty} \mathrm{P}(S_{n-1} = k - j \,|\, \mathrm{P})(Y_1 = j)\\ &= \mathrm{P}(E_{k-j})\mathrm{P}(Y_1 = j).\end{aligned}$$

(d) La famille des $(Y_1 = j)$ avec $j \in \mathbb{N}^*$ est un système complet d'événements et donc
$$\begin{aligned}\mathrm{P}(E_k) &= \sum_{j=1}^{+\infty} \mathrm{P}\big(E_k \cap (Y_1 = j)\big)\\ &= \sum_{j=1}^{k} \mathrm{P}\big(E_k \cap (Y_1 = j)\big) + 0\\ &= \sum_{j=1}^{k} \mathrm{P}(E_{k-j})\mathrm{P}(Y_1 = j) + \mathrm{P}(Y_1 = k) = \sum_{j=1}^{k} u_{k-j} f_j\end{aligned}$$
en posant $u_0 = 1$.

(e) La suite $u_k$ est une suite de probabilité : elle est bornée et la série entière $\sum u_k t^k$ est de rayon de convergence au moins égale à 1.
Par produit de Cauchy de série absolument convergentes
$$f(t)u(t) = \sum_{i=1}^{+\infty} f_i t^i \sum_{k=0}^{+\infty} u_k t^k = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{i+k=n} f_i u_k t^n = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n t^n = u(t) - 1.$$
On en déduit la relation proposée.

(f) Si $Y_1$ suit une loi de Bernoulli
$$f(t) = (1-p)t + pt^2 \quad \text{et} \quad u(t) = \frac{1}{1 - (1-p)t - pt^2} = \frac{1}{(1-t)(1+pt)}.$$
Par décomposition en éléments simples
$$u(t) = \frac{1}{1+p}\cdot\frac{1}{1-t} + \frac{p}{1+p}\cdot\frac{1}{1+pt}$$
et donc
$$u_k = \frac{1 + (-1)^k p^{k+1}}{(1+p)}.$$

(g) La fonction $f$ est un polynôme qui prend la valeur 1 en 1 :
$$f(t) = \sum_{i=1}^{n} f_i t^i.$$
Vérifions que $f(t) - 1$ ne possède pas d'autres racines que 1 de module inférieur à 1.
Supposons $|t| \le 1$. Si $f(t) = 1$, on a par inégalité triangulaire
$$1 = \left|\sum_{i=1}^{n} f_i t^i\right| \le \sum_{i=1}^{n} f_i |t|^i \le \sum_{i=1}^{n} f_i = 1.$$
On en déduit $f_i |t|^i = f_i$ pour tout $i$ compris entre 1 et $n$. Les indices $i$ tels que les $f_i$ sont non nuls étant premiers dans leur ensemble, il vient [6] $|t| = 1$. De plus, par égalité dans l'inégalité triangulaire complexe, les $f_i t^i$ ont le même argument lorsqu'ils sont non nuls. Aussi, leur somme est égale à 1 et on en tire que les $t^i$ sont tous égaux à 1. Par le même argument qu'au-dessus, il vient $t = 1$.
1 est racine simple de la fraction $u$ et ses autres racines complexes sont de modules strictement supérieurs à 1. La décomposition en éléments simples de $u$ donne l'écriture
$$u(t) = \frac{a}{1-t} + v(t)$$
avec $a = f'(1) = \mathrm{E}(Y_1)$ et $v(t)$ dont la décomposition en série entière est de rayon de convergence $> 1$ et dont les coefficients sont donc de limite nulle. On en déduit que $u_k$ tend vers $\mathrm{E}(Y_1)$ quand $k$ tend vers l'infini.

6. Si $i_1, \dots, i_p$ sont les indices pour lesquels $f_i \ne 0$, il suffit d'écrire $|t| = |t|^{i_1 u_1 + \cdots + i_p u_p}$ avec $u_1, \dots, u_p$ entiers tels que $i_1 u_1 + \cdots + i_p u_p = 1$.

**Exercice 42 :** [énoncé]

(a) Pour $t \in [-1\,;1]$

$$\begin{aligned} G_S(t) &= \sum_{m=0}^{+\infty} \mathrm{P}(S=m)t^m \\ &= \sum_{m=0}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{P}(N=n, X_1+\dots+X_n=m)t^m \end{aligned}$$

car l'événement $(S=m)$ est la réunion disjointe des événements $(N=n, X_1+\dots+X_n=m)$. Par indépendance puis réoganisation du calcul de la somme d'une famille sommable, il vient

$$\begin{aligned} G_S(t) &= \sum_{m=0}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{P}(N=n)\mathrm{P}(X_1+\dots+X_n=m)t^m \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{P}(N=n)\sum_{m=0}^{+\infty} \mathrm{P}(X_1+\dots+X_n=m)t^m \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{P}(N=n) G_{X_1+\dots+X_n}(t). \end{aligned}$$

Enfin, par indépendance, $G_{X_1+\dots+X_n}(t) = G_{X_1}(t)\times\dots\times G_{X_n}(t) = \bigl(G_X(t)\bigr)^n$ et on conclut $G_S = G_N\bigl(G_X(t)\bigr)$.

(b) $G_N$ et $G_X$ sont dérivables en 1 donc aussi $G_N\circ G_X$ et alors $S$ admet une espérance :

$$\mathrm{E}(S) = G_S'(1) = G_X'(1)\times G_N'\bigl(G_X(1)\bigr) = \mathrm{E}(X)\mathrm{E}(N).$$

(c) $G_N$ et $G_X$ sont deux fois dérivables en 1 donc aussi $G_N\circ G_X$ et alors $S$ admet un moment d'ordre 2.

$$\begin{aligned} \mathrm{V}(S) &= \mathrm{E}(S^2)-\mathrm{E}(S)^2 = \mathrm{E}\bigl(S(S-1)\bigr)+\mathrm{E}(S)-\mathrm{E}(S)^2 \\ &= G_S''(1)+G_S'(1)-\bigl(G_S'(1)\bigr)^2. \end{aligned}$$

Au terme des calculs,

$$\mathrm{V}(S) = \mathrm{E}(N)\mathrm{V}(X)+\mathrm{E}(X)^2\mathrm{V}(N).$$

(d) On évite d'écrire `lambda` qui est un mot clé **Python**.

```
import random as rnd
import math

def poisson(l):
    x = rnd.random()
    n = 0
    p = math.exp(-l)
    while x > p:
        x = x - p
        n = n + 1
        p = p * l/n
    return n

def generation(n,l):
    Z = 1
    for k in range(n):
        S = 0
        for z in range(Z):
            S = S + poisson(l)
        Z = S
    return Z
```

(e)
```
def esperance(N):
    n = 10
    l = 1.8
    E = 0
    for i in range(N):
        E = E + generation(n,l)
    E = E / N
    return E, l**n
```

car $\mathrm{E}(Z_{n+1}) = \mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Z_n)$ (car $N$ correspond à $Z_n$) et donc $\mathrm{E}(Z_n) = \lambda^n$.

**Exercice 43 :** [énoncé]

(a) Par application de la règle de d'Alembert, $R=+\infty$.

(b) Pour tout $t\in\mathbb{R}$

$$\mathrm{e}^t = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}t^n$$

et donc

$$\begin{aligned}S(t) &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n(n-1)+2n+1}{n!}t^n\\ &= \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{(n-2)!}t^n + 2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n-1)!}t^n + \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}t^n\\ &= (t^2+2t+1)\mathrm{e}^t = (t+1)^2\mathrm{e}^t.\end{aligned}$$

(c) $G_X(1) = 1$ détermine $\lambda = \mathrm{e}^{-1}/4$. On en déduit

$$\mathrm{P}(X=n) = \frac{n^2+n+1}{4\mathrm{e}\cdot n!}.$$

(d) Si $G_X$ est deux fois dérivable en 1,

$$\mathrm{E}(X) = G_X'(1) \quad \text{et} \quad \mathrm{V}(X) = G_X''(1) + G_X'(1) - \left(G_X'(1)\right)^2.$$

Ici, on obtient $\mathrm{E}(X) = 2$ et $\mathrm{V}(X) = 3/2$.

**Exercice 44 :** [énoncé]

(a) Pour tout $x \in \mathcal{X}$, on a $-p(x)\log\big(p(x)\big) \geq 0$ car $p(x) \leq 1$. On en déduit $H(X) \in \mathbb{R}_+$.
Si $H(X) = 0$ alors, par somme nulle de positifs, on a

$$\forall x \in \mathcal{X}, p(x)\log\big(p(x)\big) = 0$$

et donc

$$\forall x \in \mathcal{X}, p(x) = 0 \text{ ou } p(x) = 1.$$

Sachant que

$$\sum_{x\in\mathcal{X}} p(x) = \mathrm{P}(X \in \mathcal{X}) = 1$$

on peut affirmer qu'il existe $x \in \mathcal{X}$ tel que $p(x) = \mathrm{P}(X = x) = 1$.
La variable $X$ est alors presque sûrement constante.

(b) Par définition

$$H(X,Y) = -\sum_{(x,y)\in\mathcal{X}\times\mathcal{Y}} \mathrm{P}(X=x,Y=y)\log\big(\mathrm{P}(X=x,Y=y)\big).$$

Or les variables $X$ et $Y$ étant indépendantes

$$\mathrm{P}(X=x,Y=y) = \mathrm{P}(X=x)\mathrm{P}(Y=y)$$

puis

$$H(X,Y) = -\sum_{(x,y)\in\mathcal{X}\times\mathcal{Y}} \mathrm{P}(X=x)\mathrm{P}(Y=y)\Big(\log\big(\mathrm{P}(X=x)\big)+\log\big(\mathrm{P}(Y=y)\big)\Big).$$

On sépare la somme en deux et l'on somme tantôt d'abord en $x$, tantôt d'abord en $y$ et l'on obtient

$$H(X,Y) = H(X) + H(Y)$$

car

$$\sum_{x\in\mathcal{X}} \mathrm{P}(X=x) = \sum_{y\in\mathcal{Y}} \mathrm{P}(Y=y) = 1.$$

(c) On sait

$$\mathrm{P}(X = x \,|\, Y = y) = \mathrm{P}(X=x,Y=y)\mathrm{P}(Y=y)$$

donc

$$\mathrm{P}(Y=y)H(X \mid Y=y) = -\sum_{x\in\mathcal{X}} \mathrm{P}(X=x,Y=y)\times \Big(\log\big(\mathrm{P}(X=x,Y=y)\big) - \log\big(\mathrm{P}(Y=y)\big)\Big).$$

On sépare la somme en deux et l'on somme le résultat sur $y \in \mathcal{Y}$ pour obtenir

$$\sum_{y\in\mathcal{Y}} \mathrm{P}(Y=y)H(X \mid Y=y) = H(X,Y) + \sum_{(x,y)\in\mathcal{X}\times Y} \mathrm{P}(X=x,Y=y)\log\big(\mathrm{P}(Y=y)\big).$$

Or

$$\begin{aligned}&\sum_{(x,y)\in\mathcal{X}\times Y} \mathrm{P}(X=x,Y=y)\log\big(\mathrm{P}(Y=y)\big)\\ &= \sum_{y\in\mathcal{Y}}\sum_{x\in\mathcal{X}} \mathrm{P}(X=x,Y=y)\log\big(\mathrm{P}(Y=y)\big)\end{aligned}$$

avec

$$\sum_{x\in\mathcal{X}} \mathrm{P}(X=x,Y=y) = \mathrm{P}(Y=y)$$

donc

$$\sum_{y\in\mathcal{Y}} \mathrm{P}(Y=y)H(X \mid Y=y) = H(X,Y) - H(Y).$$

**Exercice 45 :** [énoncé]
Supposons les variables aléatoires $X$ et $Y = f(X)$ indépendantes.
Il existe au moins une valeur $x$ par $X$ vérifiant $\mathrm{P}(X = x) > 0$. En effet, la variable $X$ étant discrète $\mathrm{P}(\Omega) = 1$ est la somme des probabilités des événements valeurs $(X = x)$. Considérons ensuite la valeur $y = f(x)$.

$$\mathrm{P}(f(X) = y \,|\, X = x) = \frac{\mathrm{P}(f(X) = y \cap X = x)}{\mathrm{P}(X = x)}.$$

Or $(X = x) \subset (f(X) = y)$, donc

$$\mathrm{P}(f(X) = y \,|\, X = x) = 1.$$

Cependant, les variables $X$ et $f(X)$ étant supposées indépendantes

$$\mathrm{P}(f(X) = y \,|\, X = x) = \mathrm{P}(f(X) = y).$$

Ainsi, l'événement $(f(X) = y)$ est presque sûr. La variable aléatoire $Y$ est donc presque sûrement constante. La réciproque est immédiate et donc $X$ et $Y = f(X)$ sont indépendantes si, et seulement si, $Y$ est presque sûrement constante.

**Exercice 46 :** [énoncé]

(a) Soit $t \in \mathbb{R}$, on a, avec convergence absolue

$$M_X(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \mathrm{e}^{kt} = \mathrm{e}^{\lambda(\mathrm{e}^t - 1)}.$$

(b) Si $X$ ne prend qu'un nombre fini de valeurs $\{x_1, \dots, x_n\}$, l'affaire est entendue : la fonction génératrice des moments de $X$ est développable en série entière sur $\mathbb{R}$ avec

$$M_X(t) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{t x_k} \mathrm{P}(X = x_k)$$

et après permutation des sommes

$$M_X(t) = \sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{1}{\ell!} \sum_{k=1}^{n} (x_k)^\ell \mathrm{P}(X = x_k) t^\ell = \sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{1}{\ell!} \mathrm{E}(X^\ell) t^\ell.$$

Si $X$ prend une infinité de valeurs, c'est plus technique...

Notons $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une énumération des valeurs de $X$. Pour $t \in \left]-a\,;a\right[$

$$M_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{P}(X = x_n) \mathrm{e}^{t x_n} = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(t)$$

avec

$$u_n(t) = \mathrm{P}(X = x_n) \mathrm{e}^{t x_n}.$$

Par hypothèse, la série de fonctions convergence simplement sur $\left]-a\,;a\right[$.
Les fonctions $u_n$ sont toutes de classe $\mathcal{C}^\infty$ avec

$$u_n^{(k)}(t) = \mathrm{P}(X = x_n) x_n^k \mathrm{e}^{t x_n}.$$

Soit $\alpha > 0$ tel que $[-\alpha\,;\alpha] \subset \left]-a\,;a\right[$.
Pour $t \in [-\alpha\,;\alpha]$, on peut écrire

$$\left|u_n^{(k)}(t)\right| \le \mathrm{P}(X = x_n) \left|x_n^k\right| \mathrm{e}^{\alpha |x_n|}.$$

Introduisons $\rho \in \left]\alpha\,;a\right[$. On peut écrire

$$\mathrm{P}(X = x_n) |x_n|^k \mathrm{e}^{\alpha |x_n|} = |x_n|^k \mathrm{e}^{(\alpha - \rho)|x_n|} \times \mathrm{P}(X = x_n) \mathrm{e}^{\rho |x_n|}.$$

D'une part, la fonction $t \mapsto t^k \mathrm{e}^{(\alpha - \rho)t}$ est définie et continue sur $\left[0\,;+\infty\right[$ et de limite nulle en $+\infty$, elle est donc bornée ce qui permet d'introduire une constante $M_k$ vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}, |x_n|^k \mathrm{e}^{(\alpha - \rho)|x_n|} \le M_k.$$

D'autre part,

$$\mathrm{P}(X = x_n) \mathrm{e}^{\rho |x_n|} \le \mathrm{P}(X = x_n) \mathrm{e}^{\rho x_n} + \mathrm{P}(X = x_n) \mathrm{e}^{-\rho x_n}.$$

En vertu de la convergence en $\pm\rho$ de la série définissant $M_X(t)$, on peut assurer la convergence de la série positive

$$\sum \mathrm{P}(X = x_n) \mathrm{e}^{\rho |x_n|}.$$

La majoration uniforme

$$\left|u_n^{(k)}(t)\right| \le M_k \mathrm{P}(X = x_n) \mathrm{e}^{\rho |x_n|}$$

donne la convergence normale de $\sum u_n^{(k)}$ sur $[-\alpha\,;\alpha]$.
Via convergence uniforme sur tout segment, on peut conclure que $M_X$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\left]-a\,;a\right[$.
De plus, on a pour tout ordre de dérivation $k$ et avec sommabilité la relation

$$M_X^{(k)}(0) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n^{(k)}(0) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n^k \mathrm{P}(X = x_n) = \mathrm{E}(X^k).$$

**Exercice 47 :** [énoncé]
Posons
$$X = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}.$$
Par linéarité de l'espérance
$$\mathrm{E}(X) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{E}(X_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}p_i.$$
Les variables étant deux à deux indépendantes
$$\mathrm{V}(X) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{V}(X_i) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}p_i(1-p_i) \leq \frac{1}{4n}$$
car $x(1-x) \leq 1/4$ pour tout $x \in [0\,;1]$.
En appliquant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on écrit
$$\mathrm{P}\Big(\left|X - \mathrm{E}(X)\right| \geq \varepsilon\Big) \leq \frac{\mathrm{V}(X)}{\varepsilon^2}.$$
En passant au complémentaire, on obtient
$$\mathrm{P}\left(\left|\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}p_i\right| < \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{1}{4n\varepsilon^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$$
ce qui permet de conclure.

**Exercice 48 :** [énoncé]

(a) On sait $\mathrm{E}(S_n) = nx$ et $\mathrm{V}(S_n) = nx(1-x)$. On en déduit
$$\mathrm{E}(X_n) = x \text{ et } \mathrm{V}(X_n) = \frac{x(1-x)}{n}.$$
Par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on peut affirmer
$$\mathrm{P}\Big(\left|X_n - \mathrm{E}(X_n)\right| > \alpha\Big) \leq \frac{\mathrm{V}(X_n)}{\alpha^2}.$$
On en déduit
$$\mathrm{P}\big(|X_n - x| > \alpha\big) \leq \frac{x(1-x)}{n\alpha^2} \leq \frac{1}{4n\alpha^2}$$
car $x(1-x) \leq 1/4$ pour tout $x \in [0\,;1]$.

(b) Sachant que les valeurs prises par $X_n$ figurent parmi les $k/n$ avec $k \in [\![0\,;n]\!]$, la formule de transfert donne
$$\mathrm{E}(Y_n) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\mathrm{P}\left(X_n = \frac{k}{n}\right) \text{ avec } \mathrm{P}\left(X_n = \frac{k}{n}\right) = \mathrm{P}(S_n = k) = \binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}.$$
Ainsi
$$B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f\left(\frac{k}{n}\right)x^k(1-x)^{n-k}.$$
La fonction $x \mapsto B_n(f)(x)$ est bien une fonction polynôme.

(c) Sachant
$$\left|f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right| \leq \left|f\left(\frac{k}{n}\right)\right| + \left|f(x)\right| \leq 2M$$
on obtient
$$\left|\sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right|>\alpha}\left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right)\mathrm{P}(X_n = k/n)\right| \leq 2M\sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right|>\alpha}\mathrm{P}(X_n = k/n) = 2MP\big(|X_n-x$$
et donc
$$\left|\sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right|>\alpha}\left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right)\mathrm{P}(X_n = k/n)\right| \leq \frac{M}{2n\alpha^2}.$$
Aussi, lorsque $|k/n - x| \leq \alpha$, on a
$$\left|f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right| \leq \varepsilon$$
et donc
$$\left|\sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right|\leq\alpha}\left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right)\mathrm{P}(X_n = k/n)\right| \leq \varepsilon\sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right|\leq\alpha}\mathrm{P}(X_n = k/n) \leq \varepsilon.$$

(d) Pour $n$ assez grand, on a $M/2n\alpha^2 \leq \varepsilon$ et alors
$$\left|B_n(f)(x) - f(x)\right| \leq \left|\sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right|\leq\alpha}\left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right)\mathrm{P}(X_n = k/n)\right| + \left|\sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right|>\alpha}\left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x$$

**Exercice 49 :** [énoncé]

(a)
```
import random as rnd
import math

def S(n,p):
    R = 0
    for k in range(n+1):
        if rnd.random() < p: R = R + 1
    return R/n

import matplotlib.pyplot as plt

def test(n,p):
    Lk = range(1,n)
    LS = [S(k,p) for k in Lk]
    Linf = [p - math.sqrt(math.log(k)/k) for k in Lk]
    Lsup = [p + math.sqrt(math.log(k)/k) for k in Lk]
    plt.clf()
    plt.plot(Lk,LS)
    plt.plot(Lk,Linf)
    plt.plot(Lk,Lsup)
```
On remarque que la courbe expérimentale est plutôt bien encadrée.

(b) On a

$$tx = (1-\lambda)\times(-t)+\lambda t \quad \text{avec} \quad \lambda = \frac{1}{2}(1+x)\in[0\,;1].$$

La convexité de la fonction exponentielle produit alors le résultat voulu.

(c) La variable aléatoire $X$ est bornée donc aussi $\exp(tX)$ qui est alors d'espérence finie. L'inégalité au-dessus permet d'écrire la comparaison

$$\exp(tX)\leq \frac{1}{2}(1-X)\mathrm{e}^{-t}+\frac{1}{2}(1+X)\mathrm{e}^{t}.$$

Par croissance et linéarité de l'espérance, il vient

$$\mathrm{E}\big(\exp(tX)\big)\leq \frac{1}{2}\big(1-\mathrm{E}(X)\big)\mathrm{e}^{-t}+\frac{1}{2}\big(1+\mathrm{E}(X)\big)\mathrm{e}^{t}.$$

Enfin, la nullité de l'espérance de $X$ permet de conclure

$$\mathrm{E}\big(\exp(tX)\big)\leq \operatorname{ch} t.$$

En développant en série entière $\operatorname{ch} t$ et $\exp(t^2/2)$, on remarque $\operatorname{ch} t\leq \exp(t^2/2)$ car on peut comparer les termes sommés respectifs.

(d) On écrit $X_i = a_iY_i$ avec $\mathrm{E}(Y_i)=0$ et $|Y_i|\leq 1$ et alors

$$\mathrm{E}\big(\exp(tS)\big)=\mathrm{E}\left(\prod_{i=1}^{n}\exp(ta_iY_i)\right).$$

Par indépendance et l'inégalité précédente

$$\mathrm{E}\big(\exp(tS)\big)=\prod_{i=1}^{n}\mathrm{E}\big(\exp(ta_iY_i)\big)\leq\prod_{i=1}^{n}\exp\left(\frac{1}{2}t^2a_i^2\right)=\exp\left(\frac{t^2}{2}\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right).$$

Par l'inégalité de Markov

$$\mathrm{P}(S_n>\varepsilon)=\mathrm{P}\big(\exp(tS_n)>\exp(t\varepsilon)\big)\leq\exp(-t\varepsilon)\mathrm{E}\big(\exp(tS_n)\big)$$

ce qui donne l'inégalité voulue.

(e) On prend

$$t=\frac{\varepsilon}{\sum_{i=1}^{n}a_i^2}.$$

(f) $S_n$ est la somme de $n$ variables de Bernoulli indépendantes. En centrant celle-ci, on peut (avec largesse) prendre $a_i=1$ et alors

$$\mathrm{P}(S_n-p>\varepsilon)\leq\exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{2n}\right).$$

Avec $\varepsilon=\sqrt{(\ln n)/n}$, on obtient

$$\mathrm{P}\left(S_n>p+\sqrt{\frac{\ln n}{n}}\right)\leq\exp\left(-\frac{\ln n}{2}\right)=\frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Par passage à l'opposé de $S_n$, on obtient l'autre inégalité.

**Exercice 50 :** [énoncé]

(a) On pose $\lambda=(1+x)/2\in[0\,;1]$ et la convexité de l'exponentielle donne

$$\mathrm{e}^{(1-\lambda)(-t)+\lambda t}\leq(1-\lambda)\mathrm{e}^{-t}+\lambda\mathrm{e}^{t}$$

ce qui produit la comparaison voulue.

(b) La variable $X$ est bornée et donc $Y=\mathrm{e}^{tx}$ l'est aussi et par conséquent admet une espérance. Par ce qui précède, on a la comparaison

$$Y\leq\frac{1}{2}(1-X)\mathrm{e}^{-t}+\frac{1}{2}(1+X)\mathrm{e}^{t}.$$

Par croissance de l'espérance et nullité de l'espérance de $X$

$$\mathrm{E}(Y) \leq \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-t} + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{t} = \mathrm{ch}(t).$$

Par développement en série entière et en employant $(2n)! \geq 2^n n!$, on obtient

$$\mathrm{ch}(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n}}{(2n)!} \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n}}{2^n n!} = \mathrm{e}^{t^2/2}.$$

(c) Par l'inégalité de Markov, on a pour tout $t > 0$,

$$\mathrm{P}(X > r) = \mathrm{P}\big(\mathrm{e}^{tX} > \mathrm{e}^{tr}\big) \leq \mathrm{e}^{-tr}\mathrm{E}\big(\mathrm{e}^{tX}\big) \leq \mathrm{e}^{-tr+t^2/2}.$$

Pour $t = r$, il vient

$$\mathrm{P}(X > r) \leq \mathrm{e}^{-r^2/2}.$$

En considérant $X' = -X$, on obtient

$$\mathrm{P}(X < -r) \leq \mathrm{e}^{-r^2/2}$$

et on conclut

$$\mathrm{P}\big(|X| > r\big) \leq 2\mathrm{e}^{-r^2/2}.$$

**Exercice 51 :** [énoncé]
Par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev

$$\mathrm{P}\big(\big|X - \mathrm{E}(X)\big| \geq \alpha\sigma\big) < \frac{\sigma^2}{(\alpha\sigma^2)} = \frac{1}{\alpha^2}.$$

On conclut par considération d'évènement complémentaire.